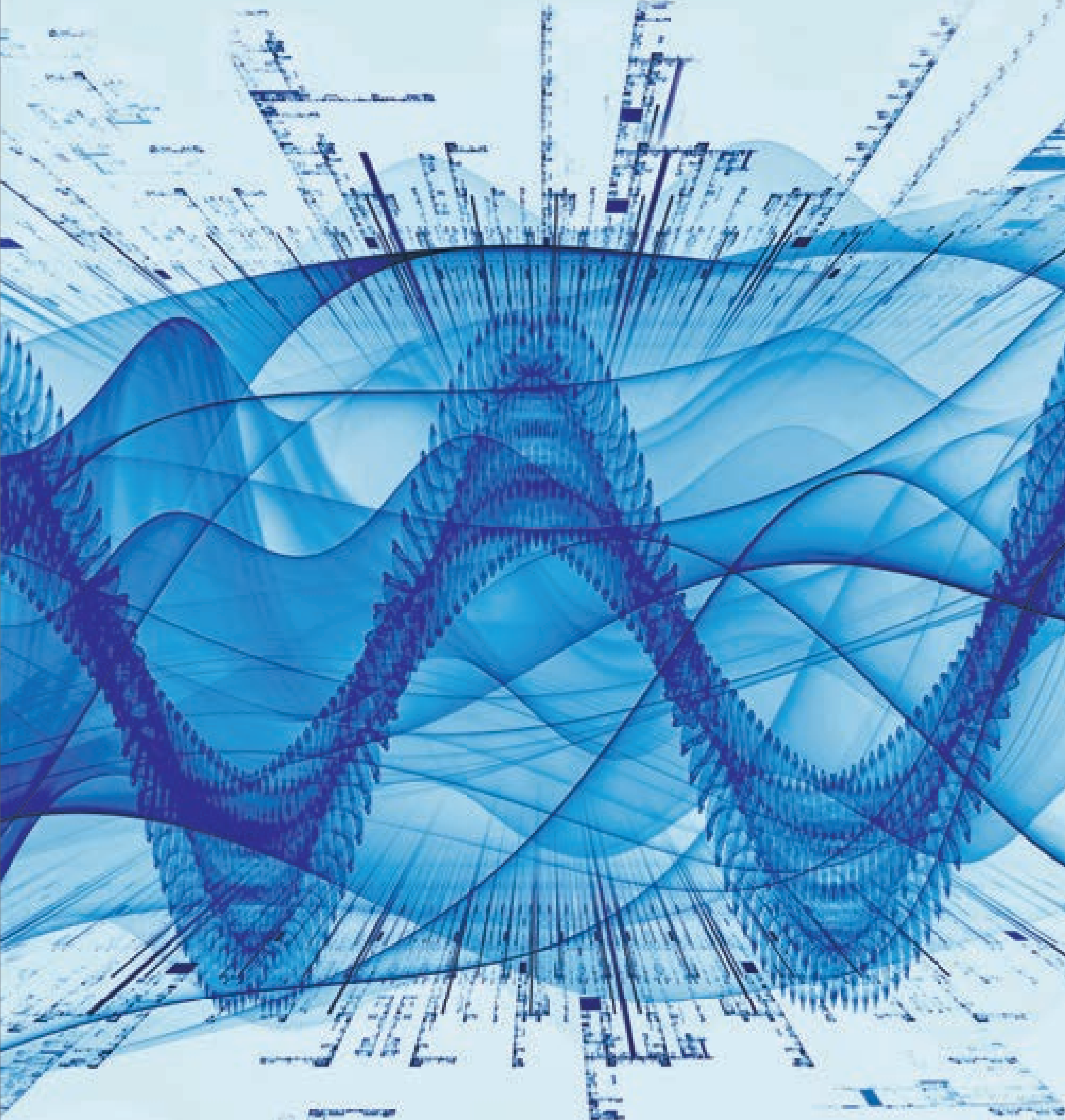
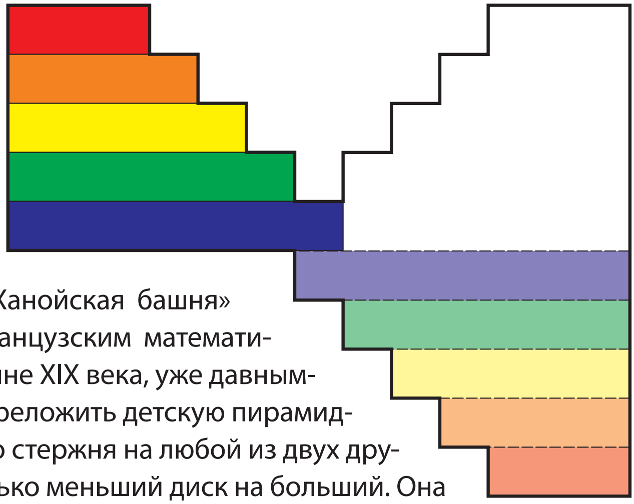
ISSN 0130-2221
АПРЕЛЬ
2020 · № 4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



СУББОТНИК В ХАНОЕ



Казалось бы, про знаменитую игру «Ханойская башня» (см. рисунок внизу), придуманную французским математиком Эдуардом Люка во второй половине XIX века, уже давным-давно все известно. В ней требуется переложить детскую пирамидку из дисков разного размера с одного стержня на любой из двух других, при условии, что класть можно только меньший диск на больший. Она прочно вошла в список стандартных задачек на применение математической индукции и в пособия для начинающих программистов.

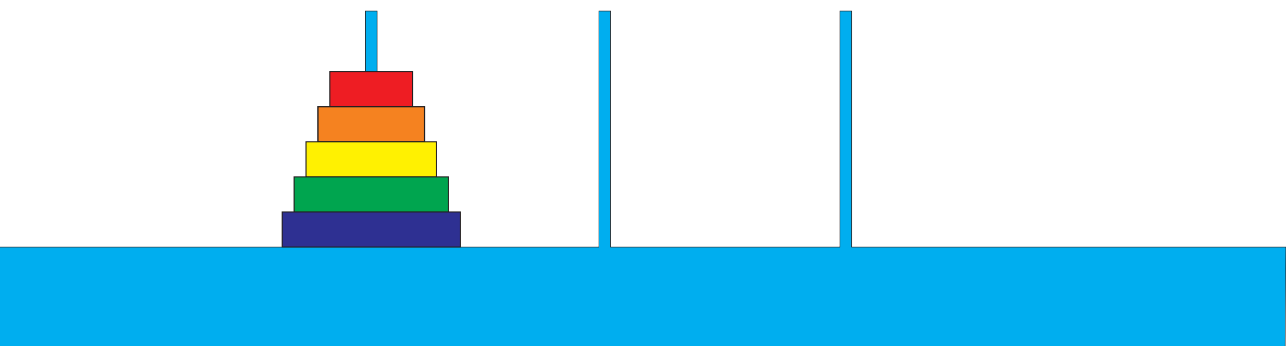
Однако, то и дело на эту тему придумывается что-нибудь новенькое. Одна из вариаций обсуждалась в «Кванте» №11 за 1991 год. Оказывается, изначально диски могут лежать на первом стержне в произвольном порядке, но во всех случаях на одном из двух других стержней можно сложить пирамидку, не нарушая правил игры.

Несколько лет назад свой вариант «Ханойской башни» придумал японский изобретатель Тоши Като (Toshi Junk Kato): он предложил «перейти» из пространства на плоскость. Английское название головоломки — Junk's Hanoi — обыгрывает прозвище автора (в переводе с английского *junk* — хлам, мусор). В ней брусочки из левой части игрового поля (символизирующие гору хлама) надо передвинуть в правую, наведя порядок. На рисунке вверху показана версия головоломки с пятью брусочками, длина самого длинного из них равна 7, самого короткого — 3 (ширина всех брусочков равна 1). Сразу скажем, что для ее решения потребуется сделать не менее 60 ходов (ходом называется передвижение одного брусочка из одной позиции в другую). Какая последовательность действий оптимальная?

Если удлинить каждый брусочек на 1 (чтобы их длины стали 4 и 8) и соответственно увеличить размеры игрового поля, то ходов потребуется уже не менее 161. Попробуйте понять, почему так происходит. Сколько ходов в оптимальном решении для n брусочков с длинами от $n-1$ до $2n-2$? Получится ли у вас найти свои интересные конфигурации?

Желаем успеха!

В.Журавлев



КВАНТ

АПРЕЛЬ 2020 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Источники электричества

Л.АШКИНАЗИ

Мы сделаем электричество таким дешевым, что жечь свечи будут только богачи.

Томас Эдисон

Сначала – кое-что о силах

Школьный учебник физики гласит, что существует четыре вида взаимодействий (т.е. сил) – гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые. И дает некоторое их сравнение – по радиусу действия, величине силы и области применения. Заметим сразу, что сравнивать силы по радиусу действия можно только, если этот радиус определен однозначно, а вообще-то лучше говорить «зависимость от расстояния». Далее, если уж сказали про зависимость от расстояния, то можно что-то изречь и про зависимость от времени, т.е. про скорость распространения. Про скорость распространения одного из этих четырех взаимодействий учебник весьма упрощенно, но хоть что-то говорит, про другую скорость если и говорит, то лишь предположительно, а еще про две вообще все молчат (хотя иногда авторы упоминают про время взаимодействия). То, что эти взаимодействия реально распространяются на столь малые расстояния, что время не имеет значения, не отговорка. Логика должна соблюдаться, упомянуть надо. Ну и наконец, сравнивать силы разной природы странно – они зависят от разных параметров (да еще и по-разному от расстояния).

Вопрос 1. Что можно сказать о скорости распространения всех взаимодействий?

Раз у нас четыре типа взаимодействий, то можно ожидать, что все, о чем рассказано в учебнике, привязано к этим взаимодействиям. Гравитационное взаимодействие проявляется в движении планет и спутников, более серьезные проблемы учебники не рассматривают, хотя рассказать кое-что о *точках Лагранжа, кривой вращения галактик, проблеме трех тел, гравитационном маневре и устойчивости солнечной системы* вполне было бы можно.[1] И это – частью как решение, а частью как постановка задачи – вполне было бы полезно для уяснения картины мира и применения физики. Электромагнитное взаимодействие проявляется в учебнике в заряде и поле, потом – в токе и индукции, третий и последний раз – в электромагнитном поле, т.е. в свете и радио. Два других взаимодействия остаются на уровне слов. Возникает вопрос: а весь остальной учебный мир – трение, реакция опоры, упругость, свойства твердых тел, жидкостей и газов – это что?

Приходится признать, что это все – электромагнетизм, но об этом учебник иногда что-то говорит, иногда молчит. А когда становится совсем невтерпеж, т.е. когда заходит речь о батарейках, – вводятся понятия «сторонние силы» и «химическая энергия». Так вот – все это электромагнетизм, но построить на основе законов электромагнетизма полную и последовательную теорию трения, упругости, прочности и т.д. современная физика может лишь частично. А в тех сегментах, в которых это возможно, теория получается настолько сложной, что изложить ее и в университетском учебнике – а в школьном тем более – нельзя. Поэтому люди прибегают к промежуточным моделям, парамет-

[1] Если термин написан курсивом, значит, о нем можно найти информацию в интернете.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200401

ры которых (коэффициент трения, упругость, прочность и т.д.) определяют экспериментально, а потом пытаются связать эти параметры между собой, продвигаясь к чаемому пониманию устройства нашего мира. Иногда это можно, на качественном уровне, сделать и в школе.

Вопрос 2. Какой коэффициент трения больше – твердого материала по твердому или того же твердого по мягкому? Как выглядит зависимость диэлектрической проницаемости от частоты для неполярной жидкости (например, жидкий аргон) и полярной (например, вода)?

Эквивалентная схема – что это?

Сейчас прибегнем к промежуточной модели и введем понятие *внутреннего сопротивления* источника электроэнергии. Подключим наш источник к переменному сопротивлению, измерим зависимость выходного напряжения и тока в нагрузке от сопротивления и построим график зависимости напряжения от тока (рис.1). Эта зависимость называется *нагрузочной характеристикой или вольт-амперной характеристикой*. Во многих случаях (например, для гальванических источников – батареек и аккумуляторов) она близка к прямой. А раз так, то возникает мысль – представить источник *эквивалентной схемой* из идеального источника ЭДС и сопротивления. Эквивалентная схема – это схема из идеальных в каком-то смысле элементов, которая ведет себя примерно так же, как реальное устройство.

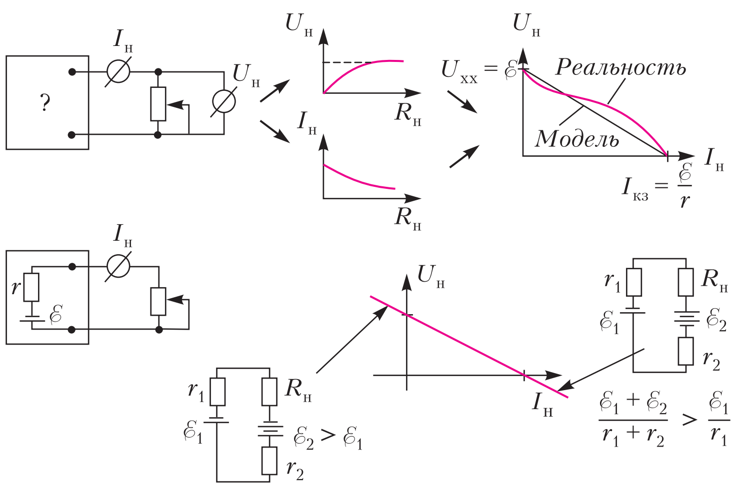


Рис. 1

Почему вообще эквивалентные схемы получили широкое распространение? Причина этого «случайна»: люди поздно создали компьютеры. Дело в том, что компьютеру можно сообщать информацию о компонентах схемы в любой форме и можно написать программу, которая – если эта информация полна и непротиворечива – сделает расчет схемы. Но если зависимости, которые характеризуют элементы, например вольт-амперные характеристики, нелинейные, то объем вычислений оказывается слишком велик для расчетов вручную. Поэтому и возникло когда-то понятие эквивалентных схем.

На заре физики электричества, когда люди о том, как течет вода, хоть что-то знали, а электричество было совсем внове, для рассмотрения электричества при преподавании применялась «гидродинамическая аналогия» – протекание тока рассматривали как течение воды. Со временем ситуация инвертировалась – для описания гидродинамики стали использовать электрические схемы, тоже в некотором смысле эквивалентные. Для расширения кругозора можно спросить в интернете *эквивалентные схемы гидравлических систем или эквивалентные схемы электромоторов.*

Теперь вернемся к нагрузочной характеристике, сделаем несколько замечаний и зададим вопросы. Замечание первое – крайние точки называются напряжением холостого хода и током короткого замыкания, их связь с параметрами эквивалентной схемы очевидна – ее можно увидеть на рисунке. Замечание второе – понятие внутреннего сопротивления создано для описания нагрузочной характеристики, и оно соответствует именно линейной модели. Если мы хотим использовать его расширительно и вычислять его для разных участков реальной характеристики, то оно окажется для них несколько различным.

Вопрос 3. Если вольт-амперная характеристика при малых токах выпукла вниз, а при больших – вверх, как на рисунке 1, то при каких токах внутреннее сопротивление окажется больше и при каких меньше? И еще – можно ли использовать понятие внутреннего сопротивления для определения тепловыделения внутри источника электроэнергии?

Замечание третье – вы, наверное, заметили, что здесь используется термин «источник электроэнергии» Лишь один раз мелькнуло «источник ЭДС», и это было не случайно. В школе вы вперемежку используете выражения «источник ЭДС» и «источник тока». В физике, а точнее в ее инженерно-физической области, которая называется ТОЭ – Теоретические Основы Электротехники (некоторые студенты вздрогнули), эти два термина означают некоторые идеализированные источники электроэнергии. А именно, «источник ЭДС» – это такой, у которого на выходных клеммах всегда одно и то же напряжение (именно это имелось в виду выше, там, где он единственный раз был упомянут). А «источник тока» – это такой, через клеммы которого и через внешнюю цепь протекает всегда один и тот же ток.

Вопрос 4. Объясните, почему это не всегда возможно. Подумайте, в каких условиях работает такая модель, и придумайте модель реального источника с использованием не источника ЭДС (как выше), а источника тока.

А теперь попробуем выйти за пределы концов нагрузочной прямой. Ведь не зря же мы назвали ее прямой, а не отрезком (это, конечно, шутка). Но сначала еще один, чисто школьный, вопрос: как вдоль нашей прямой – которая пока что отрезок – меняются мощность источника, мощность в нагрузке и коэффициент полезного действия? Если пользоваться моделью с источником ЭДС, как на рисунке 1, то мощность, создаваемая источником, растет с током от $P = 0$ до $P = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/r$. Мощность в нагрузке проходит через максимум при сопротивлении нагрузки $R = r$, а мощность, выделяющаяся в источнике, растет как rI^2, т.е. всю дорогу – не спалите источник! Ну, а КПД соответственно падает от 100% до 0. При согласованной нагрузке это 50%. Все эти ответы можно дать без вычислений, просто посмотрев на схему и немного подумав.

А теперь – «поверх барьеров»! Что будет с нагрузочной характеристикой, если ток будет больше тока короткого замыкания или будет течь в обратную сторону? Вы все (ну, почти все) делаете это, а некоторые – ежедневно. Разумеется, для того чтобы пропустить через нагрузку ток в обратную сторону, нужен еще один источник напряжения, причем не какой попало. Какой же? И как его включить? А чтобы пропустить через нагрузку ток, больший тока короткого замыкания, тоже нужен дополнительный источник, причем тут его и включать надо иначе, и требований к нему будет не одно, а два. Ток в обратную сторону – это просто режим заряда. А почему аккумуляторы заряжаются, а батарейки или совсем нет или очень плохо, читайте в интернете, ключевое слово – *деполяризатор*. Так вот, чтобы ток через нагрузку тек в обратную сторону, в нагрузку включаем источник с большей ЭДС, чем у основного источника, причем навстречу. А чтобы тек ток, больший тока короткого замыкания, в нагрузку включаем источник с большей ЭДС, чем у основного, причем такой, чтобы $(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2) > \mathcal{E}_1/r_1$.

Об устройстве батарейки

Пришла пора спросить, от чего зависят параметры $\mathcal{E}$ и r. Когда мы опускаем проводник (в частности, металл) в электролит, ионы из металла начинают переходить в раствор и обратно. Эти потоки зависят, в частности, от прочности решетки проводника, концентрации ионов в растворе и температуры. При переходе ионов электрод заряжается и возникает разность потенциалов между электродом и раствором, образуется *двойной электрический слой*. В итоге устанавливается такая разность потенциалов, чтобы потоки сравнялись и возникло динамическое равновесие.

Если опустить в этот же электролит другой проводник, то у него появляется свой потенциал относительно электролита, отличающийся от того, который появился на первом электроде. Таким образом возникла разность потенциалов между электродами, мы изобрели *гальванический элемент*.

Чтобы расширить образование и поразиться человеческой изобретательности, можно набрать в интернете *резервные гальванические элементы*. Кстати, вы даже из школьного учебника знаете, что бывают элементы с двумя разными электролитами, разделенными полупроницаемой мембраной; так что здесь дана сильно упрощенная картина.

Что касается внутреннего сопротивления, то оно связано, как обычно, с сопротивлением среды, по которой вынужден течь ток. Это – электролит, т.е. то, что находится между электродами (и выводы, но их сопротивление обычно пренебрежимо мало). Впрочем, раз нагрузочная характеристика не линейна, то сопротивление не постоянно, а само сложно зависит от тока. Причем если мы произнесли слова «двойной электрический слой», значит, мы признали, что среда неоднородна. Внутреннее сопротивление, как ему и положено (помните $R = \rho L/S$?) действительно уменьшается при уменьшении толщины и увеличении площади слоя. Но оно уменьшается и при увеличении шероховатости электродов, а это говорит о большом вкладе в сопротивление именно прикатодного слоя, того самого двойного слоя. В общем, поле для исследований у вас будет – причем эта область физики очень и очень востребована техникой.

Химические источники электрической энергии создают на своих клеммах разность потенциалов, а вокруг них, соответственно, появляется электрическое поле. В электростатике эти вещи неразделимы – у заряда есть поле, силовые линии (при всей условности этого понятия) кончаются и начинаются на зарядах. Вне электростатики может быть и не так – если контур пронизывает переменный магнитный поток, то в контуре возникает электрическое поле, его силовые линии замкнуты, они не начинаются и не кончаются на зарядах. Разумеется, такое поле не потенциально – запустив в этот контур заряд или просто поместив в него замкнутый проводник, мы извлечем из него энергию.

Вопрос 5. Откуда, кстати, она возьмется?

Пусть источник электроэнергии имеет разность потенциалов между клеммами $\mathcal{E}$ при $I = 0$, т.е. при отсутствии потребления, в режиме холостого хода. Будет ли на клеммах заряд? Иногда уточняют – избыточный заряд, чтобы не услышать, что «какие-то заряды есть всегда – протоны и электроны в атомах». Естественно, клеммы будут заряжены зарядом $Q = \mathcal{E}C$, где C – емкость между клеммами, пропорциональная размеру клемм D. Когда мы соединим клеммы сопротивлением R, по нему и по ним потечет ток. Если ток будет не бесконечно мал, то напряжение между клеммами уменьшится: $U < \mathcal{E}$, уменьшится и заряд. Разность зарядов сбросится через это самое сопротивление в виде импульсного тока, длительность этого импульса будет порядка $\tau = \max(RC, D/c)$, где c – скорость света, R – сопротивление клемм и нагрузки, оно не включает сопротивление источника r. Иными словами, обмен зарядами между клеммами произойдет, даже если мы разорвем цепь источника, т.е. сделаем r неограниченно большим.

Казалось бы, экзотическая ситуация? Да, но абсолютно реальная, например – *оксфордский электрический звонок*. Если сильно упрощать ситуацию, то это – маятник, шарик на конце нити колеблется, поочередно касаясь контактов высоковольтной батареи и в момент касания заряжающийся от них. При этом внутреннее сопротивление батареи огромно, средний ток потребления ничтожно мал (устройство работает от одной батареи больше века), но время заряда весьма мало, поэтому в импульсе ток значителен. При большом сопротивлении батареи заряд касающегося клемм шарика происходит не током «батареи», а током накопленного на клеммах заряда. Вот оценка параметров: $\mathcal{E} = 10^3$ В, $C = 10^{-12}$ Ф, $Q = 10^{-9}$ Кл,

$\tau = 3 \cdot 10^{-11}$ с, $I_{max} = Q/\tau = 30$ А, однако средний ток равен отношению Q к периоду колебания $T = 1$ с, т.е. 10^{-9} А.

Необычные источники

Однако не все источники электрической энергии имеют нагрузочную характеристику, похожую на прямую, есть и совершенно другие ситуации. В частности, иначе ведут себя источники электрической энергии, использующие энергию, выделяющуюся при радиоактивном распаде. Распадающийся атом – сам по себе преобразователь видов энергии, т.е. внутриядерную энергию он преобразует в механическую энергию, точнее в кинетическую энергию, продуктов распада плюс потенциальную, если они заряжены, плюс электромагнитную, если это кванты. Далее есть несколько вариантов преобразования, один из них – через тепло. Частицы тормозятся в среде, энергия преобразуется в тепло (часть – в разрушение межатомных связей), а дальше есть много разных способов, самый распространенный – через термоэлектричество (*РИТЭГ*), возможны и другие. Общие обзоры этих методов есть в интернете.

Рассмотрим не тепловые пути превращения энергии радиоактивного распада в электричество. Возьмем две пластины из проводника, нанесем на одну из них радиоактивный изотоп, поместим эти пластины в вакуум, сделав от них выводы. В некоторой ситуации между выводами начнет расти напряжение. Быстро ли оно будет расти и какой величины достигнет? Расти оно будет, только если при распаде вылетают заряженные частицы (α или β) и попадают на вторую пластину. Скорость роста пропорциональна количеству распадов за единицу времени, заряду частиц и обратно пропорциональна емкости: $U = Q/C$, а $\Delta U/\Delta t = \Delta Q/(C\Delta t) = I/C$, где I – ток этих частиц. Расти U будет до тех пор, пока что-то не прекратит этот ток или не возникнет ток утечки по оболочке, или не произойдет вакуумный пробой либо пробой по воздуху. Но если все сконструировано правильно, то утечек и пробоев не будет, а напряжение между электродами постепенно увеличится до такого, что заряженные частицы просто перестанут долетать до второго электрода. Это произойдет именно тогда, когда напряжение, умноженное на их заряд, сравняется с их исходной энергией (рис.2; здесь сплошная линия – идеализация, штриховая линия –

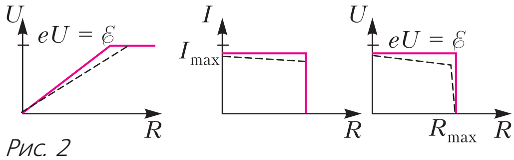


Рис. 2

ближе к реальности, e – заряд, $\mathcal{E}$ – энергия, I_{max} – ток заряженных частиц). Теперь мы можем сообразить, какой будет нагрузочная кривая для атомной батареи именно такой конструкции – мы оговариваем это потому, что реальные атомные батареи устроены иначе, и далее расскажем, как именно. Но пока – вот эта принципиальная конструкция, предложенная Генри Мозли более 100 лет назад. (Для расширения кругозора можно попробовать найти в интернете статью *Пять фотографий Генри Мозли* и прочитать ее.) А нагрузочная кривая будет совершенно фантастической – просто горизонтальная прямая от нуля тока до максимального, когда все заряженные частицы имеют строго одну энергию и долетают куда надо, и спад до нуля при достижении критического значения тормозящего напряжения. Потому что ток, больший тока заряженных продуктов распада, получить из атомной батареи простейшей конструкции нельзя.

Реально энергии частиц немного различаются хотя бы потому, что не все распадающиеся атомы лежат на поверхности, некоторым заряженным частицам приходится пробираться к поверхности и часть энергии при этом остается на пластине – источнике частиц. Кроме того, не все заряженные частицы летят перпендикулярно поверхностям электродов, а для того чтобы не допустить до пересечения зазора частицу, вылетевшую под углом, нужно меньшее тормозящее поле. Поэтому реальная зависимость станет менее категоричной.

Однако это только начало биографии *атомных батарей* или, как их еще называют, *изотопных батарей*. Вся применяемая людьми электротехника использует вполне определенный диапазон напряжений и токов. Вы редко встретите напряжения больше 20–30 кВ, потому что при этих напряжениях возникают серьезные проблемы с изоляцией, а если это вакуумные приборы и электроны имеют в них высокую энергию, еще и возникает рентгеновское излучение. Другими словами, если надо все это использовать, есть электронные приборы с напряжением 300 кВ и более и есть линии электропередач 500 кВ и более – но это промышленность, а не быт, хотя и очень важные для цивилизации, но узкие области. Что касается тока, то тоже особо большие токи не слишком удобны – растет сечение проводов. Так что если для какого-то применения нужна определенная мощность, то сочетания напряжения и тока могут быть разные, определяется это экономикой, схемными возможностями, традицией и т.д. Но в общем и целом, то сочетание напряжения и тока, которые могли бы давать атомные батареи тривиальной конструкции, категорически неудобны. Хорошо бы иметь напряжение порядка на три-четыре меньше, а ток, соответственно, больше.

Путей решения этой проблемы предложено несколько, причем важно понимать две принципиальные вещи. Чем лучше мы используем ту большую энергию, с которой вылетают частицы, тем выше будет КПД. Другое ограничение – малогабаритное устройство не может иметь на выходных клеммах высокое напряжение, иначе произойдет пробой. Малогабаритное устройство с высоким КПД должно как-то использовать высокую энергию частиц внутри себя, во что-то ее преобразовывая. Посмотрим, какие варианты предложены.

Первый – заряженные частицы попадают в пленку полупроводника, где они тормозятся и отдают свою энергию электронам. Само по себе это просто увеличивало бы проводимость, поэтому пленка не однородна, это *p–n*-переход с двумя, как ему и положено, выводами. Тормозящиеся в *p–n*-переходе быстрые первичные электроны порождают электронно-дырочные пары, поле перехода растаскивает электроны и дырки в разные стороны, на выводах накапливаются заряды, и, подсоединив к выводам нагрузку, мы получим ток. Один электрон с энергией в килоэлектронвольты порождает тысячи пар, каждая имеет в тысячи раз меньшую энергию, но зато их в тысячу раз больше – это и обеспечит увеличение тока. Правда, при отборе тока электронам приходится пробираться сквозь слой полупроводника, и вольт-амперная характеристика приобретает черты того варианта, что был у батареек – при отборе тока напряжение заметно падает.

Проблем у такой конструкции несколько, и одна – общая со всеми атомными батареями. А именно, выбор изотопа и его количества. Период полураспада – это темп падения мощности со временем и срок службы батареи; количество изотопа и энергия продуктов распада – это мощность батареи, ее опасность для окружающих, а если она будет летать в космосе – то это последствия прибытия на Землю с разрушением в атмосфере и заражением (уже были прецеденты) и ее опасность для окружающих устройств. Например, полупроводниковые приборы не любят, когда их облучают. Естественно, есть еще общетехнические проблемы – вес, габариты, стоимость, срок службы, надежность, иногда ремонтопригодность, патентная чистота. Патентная чистота важна, если собираются производить и легально продавать приборы. Вес и габариты – если это носимая, возимая, бортовая аппаратура летательного средства. Самое интересное – срок службы и надежность, потому что иногда лучше срок службы 10000 часов с надежностью 0,9, а иногда лучше 5000 и 0,95 или 1000 и 0,99... (подумайте, когда и почему).

Еще одна проблема, которую тоже можно назвать общетехнической, – это принципиальная конструкция, оптимизация параметров, выбор материалов и размеров. Например, в данном случае нужно выбрать оптимальную толщину слоя, содержащего изотоп, – чтобы частицы не затормозились в нем самом. И выбрать оптимальный полупроводник, чтобы он, например, не разрушался излучением. Эти вопросы исследуются, обсуждения вы легко найдете в литературе. По ситуации на сегодня, в качестве изотопа используют тритий T (он же ^{3}H) и никель-63 (он же ^{63}Ni), в качестве полупроводника – кремний Si, карбид кремния SiC, нитрид и арсенид галлия GaN и GaAs или алмаз C. На рисунке 3 представлена вольт-амперная

Рис. 4

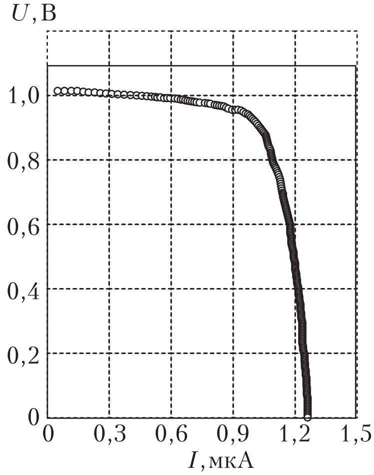


Рис. 3

характеристика оптимизированного источника на никеле и алмазе.

Вопрос 6. Как вы думаете, будет ли при работе эта батарейка греться, в какой точке характеристики батарейка будет отдавать в нагрузку максимальную мощность и в какой точке будет минимален нагрев.

Подобное устройство может и не иметь двух электродов – с изотопом и без оного, изотоп может просто контактировать с полупроводником. В этом случае высокоэнергетичным частицам не нужно пересекать вакуумный зазор – родившись, они сразу начинают распространяться сквозь полупроводник, тормозясь и порождая многочисленные электронно-дырочные пары. Такие батареи (рис.4) уже выпускаются серийно, их напряжение 0,75–2,4 В, ток 0,05–0,3 мкА, срок службы 20 лет. Распадающийся изотоп – тритий T, поэтому через 12 лет ток падает вдвое, полупроводник – кремний Si.

Более того, можно, по крайней мере теоретически, поискать вариант, когда изотоп является одним из элементов, входящих в полупроводник. Например, если использовать изотоп углерод-14 (он же ^{14}C), то можно попробовать в качестве полупроводника алмаз C или карбид кремния SiC. Такие идеи предлагались, и поскольку период полураспада здесь 5700 лет, то батарейка получается вечной. Но этот параметр почти для всех применений (кроме полета к *экстрасолнечным планетам*) будет избыточен, а мощность относительно мала. Кстати, при некоторых условиях и графен становится полупроводником – так что есть, о чем пофантазировать.

Предлагался и такой вариант – высокоэнергетичные частицы возбуждают люминесценцию, этот эффект известен и используется. Вот, например, имеются брелоки с тритием и люминофором (рис.5). Далее свет преобразуется в электричество фотоэлементом. Но каждое преобразова-

Рис. 5

ние вообще уменьшает КПД, а у фотоэлементов он не слишком велик.

Известны варианты конструкций (некоторые реально использующиеся, некоторые на уровне первых лабораторных образцов) с полетом заряженных частиц через вакуум, причем «плоскость прилета» сделана гибкой. В этом случае при попадании на нее заряженных частиц она изгибается, и если в итоге касается «плоскости вылета», то заряд сбрасывается обратно. В итоге мы получаем генератор не постоянного, а переменного напряжения – что тоже для чего-то может пригодиться. Периодически изгибающаяся консоль может быть использована как механический двигатель, а если сама консоль сделана из *пьезоэлектрика* – то как еще один источник напряжения, такая идея предлагалась. Во всех случаях остаются в силе соображения, изложенные выше, – или высокое напряжение, но тогда значительные габариты, или малые габариты, но тогда низкий КПД. В последнем случае он становится еще меньше из-за наличия второго преобразования.

Пьезокристалл – это еще один источник электроэнергии. Точнее – преобразователь работы в электрическую энергию и обратно, т.е. электроэнергии в перемещение. Сопротивление пьезокристалла весьма велико, поэтому мощность его, как преобразователя механической работы в электрическую мощность, мала. Обычно он применяется либо как источник высокого напряжения и малой мощности, например в зажигалках, либо как датчик перемещений – там мощность не столь важна. В обратном направлении – как способ создания малых перемещений. Это – генераторы ультразвука и устройства для точного перемещения объектов в микроскопии и оптике. Отдельная область применения – использование механического резонанса в кристалле.

Принципиальное отличие вольт-амперной характеристики атомных батарей от обычных, химических, состоит в том, что атомные батареи переносят заряженные частицы и этот поток ограничен в принципе. Его можно прекратить, подав на выводы соответствующее напряжение, но ни сменить его направление, ни пропустить через атомную батарею ток, больший тока короткого замыкания, невозможно (если, конечно, мы не подадим напряжение, большее напряжения вакуумного пробоя – но при этом мы батарею выведем из строя).

В кабинете физики

Существуют и другие источники электрической энергии, переносящие заряды, это – *солнечные батареи, генератор Ван де Граафа и электрофорная машина*, коечто из этого может быть в школе. Солнечная батарея – это p–n-переход, генерация электронно-дырочных пар производится не высокоэнергетичной заряженной частицей, а квантом света. Поскольку солнечный свет на земле бесплатен и его много, люди давно и упорно пытаются добывать электроэнергию прямо из него. Сейчас из всей энергии, используемой человечеством, примерно 2% получают от таких батарей. Это немного, но цифра устойчиво растет, причем в ближайшие годы рост ускорится – потому что электричество, получаемое этим способом, сравняется по стоимости с «обычным» и это увеличит приток инвестиций. Соответственно, вольт-амперная характеристика солнечной батареи похожа на характеристику атомной батареи. На рисунке 6 представлен пример характеристик при разной освещенности.

Генератор Ван де Граафа – это источник весьма высоких, до 25 МВ, напряжений при малых токах, хотя усовершенствован-

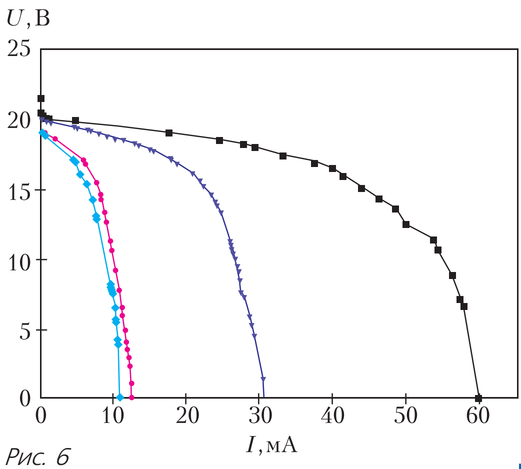


Рис. 6

ная модификация, *пеллетрон*, выдает до 0,5 мА. Исторически его использовали для физических экспериментов, например для питания линейных ускорителей, сейчас – наверное, только в учебных целях. Генератор содержит диэлектрическую кольцевую ленту, натянутую между двумя роликами и расположенную вертикально – нечто вроде вертикального эскалатора. У нижнего конца расположен источник умеренно высокого напряжения, который ионизует воздух. Ионы налипают на ленту и переносятся ею наверх. Наверху заряд снимается с ленты и переносится на проводящий шар большого диаметра.

Вопрос 7. Чем ограничено максимальное напряжение генератора Ван де Граафа, за счет чего накапливается в нем энергия и что происходит с ионами, доставленными лентой наверх?

Существует еще несколько устройств, в которых высокое напряжение создается за счет работы по перемещению зарядов. Вот три примера, два из которых вам, скорее всего, известны. Первый – капельница Кельвина. Попробуйте догадаться, как она работает, посмотрев на рисунок 7. Устройство примитивно – две металлические банки внизу, два металлических кольца выше, два провода и труба с раздвоением, из которой капает.

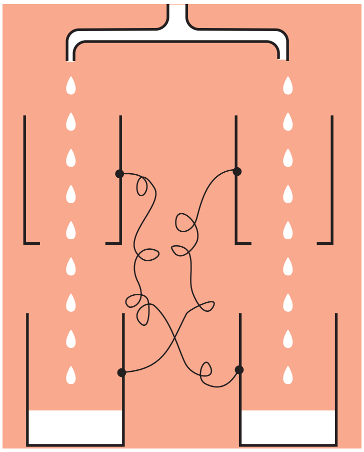


Рис. 7

Оказывается, принципиальный момент здесь – случайная несимметрия по заряду. Например, одну банку двигали по столу, другую нет, первая и электризовалась. А дальше что происходит? Например, левая зарядилась минусом. Тогда правое кольцо тоже заряжается минусом, правый конец трубы – плюсом, капли из него и правая банка – плюсом, причем чем дальше, тем больше. Но вот вопрос – чем ограничено напряжение?

Близкие по принципу работы родственники этого прелестного устройства – *электрофорная машина* и ее предшественница машина Гольца.

Заметим, что при обсуждении работы электрофорных машин часто начинаются споры, важна ли для их работы электризация трением. Из источников в интернете можно сделать вывод, что электризация трением сделает более быстрым процесс накопления заряда. И в более старых конструкциях она действительно применялась. В более поздних конструкциях, рассчитанных не на достижение наибольших напряжений, а предназначенных для демонстрации эффекта, стали обходиться без этого. Электризацию трением серьезно исследовал *М.И.Корнфельд* (публикации в журнале «Физика твердого тела»), а популярное изложение есть в журнале «Квант» (№6 за 1985 г.).

Напоследок заметим, что источники электричества есть у живых организмов, например — у некоторых рыб. Люди такие источники, кажется, не применяют, а рыбы — вполне. Они используют их для локации и как оружие. И есть еще один источник электричества, причем мы сами живем внутри этого источника — это атмосфера. В этом случае мы можем указать на некоторые процессы, благодаря которым работает такая батарейка. Перенос зарядов осуществляется в атмосфере аэрозолями — каплями воды, кристаллами льда. А их заставляют двигаться потоки воздуха и гравитация.

Еще раз о графике синуса

Е.БАКАЕВ

В статье П.Панова (см. «Квант» № 3) обсуждается, как выглядит график $\sin(314x)$, состоящий из точек с абсциссами, кратными 10^{-3}. Естественно обобщить этот вопрос и выяснить, как выглядит график $\sin(ax)$, если отмечаются только его точки с абсциссами, кратными d.

Здесь же мы рассмотрим другой подход к этой задаче. Для простоты мы тоже возьмем частный случай, но другой: $a = d = 1$.

Построим график: на рисунке 1 изображены точки, соответствующие значениям $\sin x$ для целых x от 0 до 50. Но размеры графика и, соответственно, масштаб осей можно выбирать по-разному. Например, вот первые 1000 точек $\sin x$ для натуральных x (рис.2) и первые 10000 точек (рис.3). Получается, что a и d это не единственные параметры, от которых зависит, что мы увидим на графике, – важен еще масштаб осей.

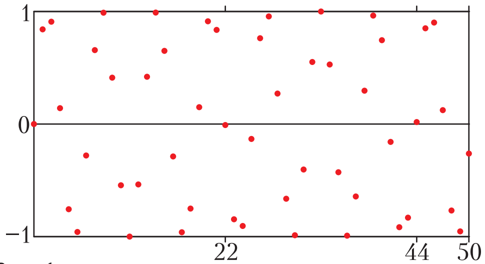


Рис. 1

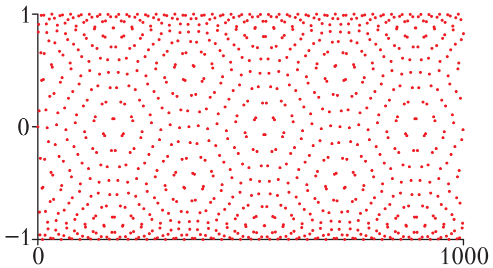


Рис. 2

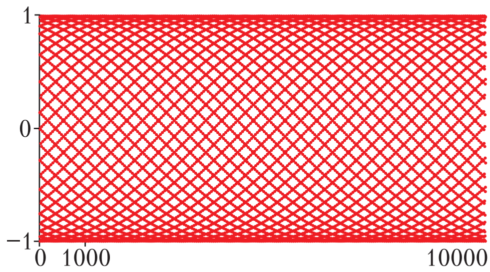


Рис. 3

Графики друг на друга не похожи: на одном вырисовывается узор из шестиугольников, а на другом возникает переплетение линий, похожих на синусы. А ведь они устроены одинаково, просто график с 1000 точками это растянутая в ширину 1/10 часть графика с 10000 точками (при этом растягивании сами точки не вытягиваются в овалы, а по-прежнему остаются круглыми). В этом можно убедиться, посмотрев на график на рисунке 2 сбоку под острым углом.

Тем не менее графики выглядят по-разному, потому что при таком растягивании расстояние между многими парами точек увеличивается, и точки, которые на рисунке 3 кажутся близкими, на рисунке 2 могут такими не казаться.

Такой вопрос был поставлен в книге Гилберта Стрэнга [1]. Более подробно он разобран в статье Нормана Ричерта «Strang's Strange Figures» [2]. Наш подход будет во многом следовать этим источникам. Но будет и отличаться.

Прямая, намотанная на цилиндр

Чтобы сделать дальнейшие рассуждения и вычисления более простыми, перейдем от синусов к рассмотрению прямых. Для этого представим себе цилиндр. Если на прозрачной пленке нарисовать прямую и намотать пленку на прозрачный цилиндр

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200402

(рис.4), то проекция такого цилиндра на плоскость, параллельную образующей цилиндра, будет графиком синуса. Опишем это подробнее.

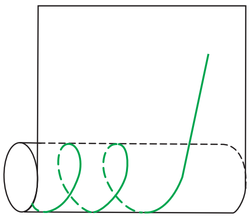


Рис. 4

Пусть на пленке изображены перпендикулярные оси x, t (их единичные отрезки не обязательно равны), прямая l, задаваемая уравнением $t = kx$, и одна из ее точек $A(x_0; kx_0)$ (рис.5).

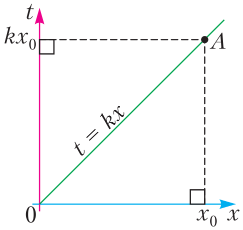


Рис. 5

Намотаем пленку на цилиндр радиуса 1 так, чтобы ось x совпала с одной из образующих цилиндра. Оси x, y, z попарно перпендикулярны, единичные отрезки осей y и z равны, а единичный отрезок x может от них отличаться. На рисунке 6 старые

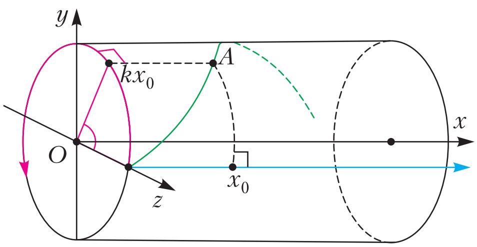


Рис. 6

оси x и t изображены теми же цветами, что и на предыдущем. Посмотрим, какие координаты имеет точка A в этой системе координат. Координата по оси x такая же, x_0. Координата по оси t стала углом поворота, поэтому координаты по осям y и z – соответственно, $\sin kx_0$ и $\cos kx_0$. Значит, если спроецировать цилиндр на плоскость Oxy, то проекция точки A будет иметь координаты $(x_0; \sin kx_0)$. Тогда проекция прямой l, намотанной на цилиндр, будет состоять из точек этого вида, т.е. будет графиком уравнения $y = \sin kx$.

И наоборот – графику $\sin x$ (масштаб осей не обязательно одинаковый) можно поставить в соответствие прямую, нарисованную на пленке, которая намотана на цилиндр. Если мы разрежем пленку на цилиндре по оси x и развернем, то получим наложенные друг на друга части пленки с нарисованными на них отрезками. Ширина этих кусков пленки будет равна 2π – длине окружности, являющейся основанием цилиндра.

Несложно понять, что точка с координатами $(x_0; y_0)$ на пленке будет на развернутой пленке иметь координаты $(x_0; y_1)$, где $y_1 = y_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \le y_1 < 2\pi$. Это похоже на «остаток при делении» на 2π, если проводить аналогию с целыми числами. Обозначим эту функцию как $m(x) = \left\{\frac{x}{2\pi}\right\} \cdot 2\pi$ (где $\{a\}$ – дробная часть числа a). Тогда $y_1 = m(y_0)$.

Итак, представив графики на рисунках 2 и 3 как нарисованные на пленке, намотанной на цилиндр, затем разрезав и развернув эти воображаемые куски пленки, получим графики на рисунках 7 и 8.

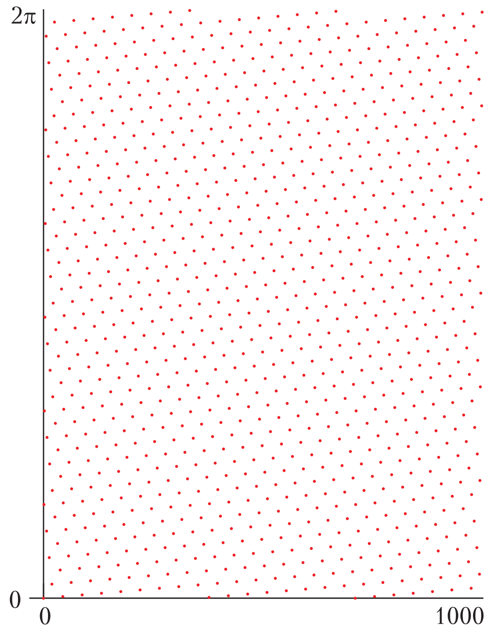


Рис. 7

Почему образуются линии?

Докажем, что на рисунке 8 точки выстраиваются в прямые линии. Из этого будет следовать, что линии на рисунке 3 это действительно синусы.

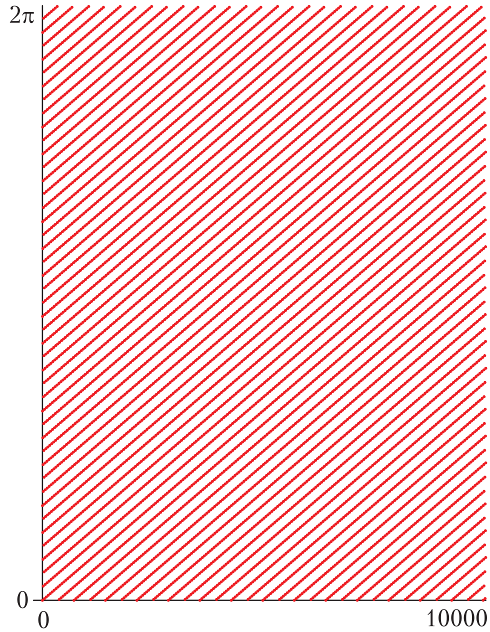


Рис. 8

Из-за чего точки образуют одну линию? Потому, что они образовали последовательность точек, в которой соседние точки расположены близко друг к другу. Судя по рисунку 8, одна из прямых выходит из точки $(0; 0)$. Давайте поймем, что за последовательность точек может образовать такую линию. Точку $(i;\ m(i))$ будем обозначать как A_i.

Какая точка графика близко расположена к $(0; 0)$? Пусть это точка A_k. Тогда «остаток при делении» k на 2π чуть больше нуля, т.е. число k примерно равно $2\pi n$, причем чуть больше его. Выпишем приближенные значения первых чисел вида $2\pi n$: 6,28; 12,57; 18,85; 25,13; 31,42; 37,70; 43,98. Таким образом, 44 чуть больше $2\pi \cdot 7$ и дает маленький «остаток». Предыдущие числа дают «остаток» не меньше 0,15, т.е. они хотя бы в 7 раз дальше от оси x.

Можно было найти это число не проводя эти подсчеты, а присмотревшись к рисунку 1. Видно, что $\sin 44$ близок к нулю и чуть больше его (между точкой и прямой $y = 0$ не видно просвета), а до этого такой ситуации не встречается.

Также можно заметить: для того чтобы k было примерно равно $2\pi n$, достаточно, чтобы $k/n \approx 2\pi$. Дробь $22/7$ это известное приближение числа π, отсюда и возникает $44/7$.

Но известно, что дробь $355/113$ тоже приближает π с избытком, тогда $710/113$ приближает 2π. Почему же при этом не возникают еще и прямые с другим наклоном? Посмотрим, как точки с абсциссами, отличающимися на 710, удалены друг от друга на нашем графике на рисунке 8. Их ординаты действительно близки, но вот абсциссы отличаются сильно. Ширина графика примерно 60 мм, значит, они удалены примерно на $60 \cdot \frac{710}{10000} = 4{,}26$ мм по оси абсцисс – это достаточно много для того, чтобы такие точки не казались нам близкими, потому что на этом рисунке у каждой точки есть гораздо более близкие соседи. Для примера пара таких точек, A_{3000} и A_{3710}, выделена на рисунке 9.

Точки же с разностью абсцисс 44 удалены друг от друга примерно на $60 \cdot \frac{44}{10000} \approx 0{,}26$ мм по оси абсцисс и на

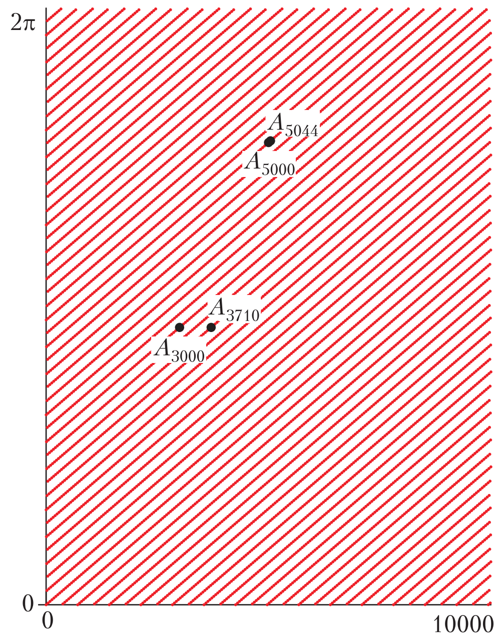


Рис. 9

$80 \cdot \frac{44 - 7 \cdot 2\pi}{2\pi} \approx 0{,}23$ мм по оси ординат (так как высота графика – около 80 мм) и поэтому кажутся нам близкими. (Это относится не ко всем парам точек: если точка стоит в самом верху или самом низу графика, то возможен «переход остатка» через 2π.) Пара таких точек, A_{5000} и A_{5044}, выделена на рисунке 9 – между ними не видно просвета, они почти сливаются в одну точку.

Заметим: мы не определяем, что значит «близкий». Лишь говорим, что какие-то расстояния явно достаточно маленькие, чтобы точки казались близкими, а какие-то – явно слишком большие. Также мы пренебрегаем размером точек и считаем их достаточно маленькими – понятно, что рисунок может кардинально измениться при существенном увеличении размера точек, из которых он состоит.

О приближении π и других чисел рациональными дробями можно прочитать в статье Н.Бескина «Цепные дроби» («Квант», 1970, №1).

Почему линии прямые?

Вернемся к рассмотрению линии, выходящей из $(0;0)$ на рисунке 8. Мы выяснили, что вторая точка этой цепочки $(44;\, 44 - 7 \cdot 2\pi)$. Ровно так же взаимно расположены и другие точки, абсциссы которых отличаются на 44, т.е. точки $(k;\, m(k))$ и $(k+44;\, m(k+44))$ (опять же, кроме стоящих в самом верху или самом низу графика), значит, $\overrightarrow{A_k A_{k+44}} = \overrightarrow{A_0 A_{44}}$.

Доказать это можно с помощью свойств «остатка при делении». Доказательство оставим читателю в качестве упражнения.

Таким образом, получаются 44 «прерывающиеся» прямые, каждая из которых идет вдоль вектора $\overrightarrow{A_0 A_{44}}$ до верха графика и потом возобновляется снизу. И когда обернем пленку с прямой вокруг цилиндра, то получим 44 графика синуса (графики синусов, начинающиеся с одной стороны цилиндра, будут сначала убывать, а начинающиеся с другой – сначала возрастать).

Откуда возникают треугольники?

На рисунке 7 возникает сетка из треугольников, похожих на равносторонние. Здесь уже не вырисовываются сплошные линии, как на рисунке 8. Зато есть три направления (по сторонам треугольников), вдоль которых расстояния между соседними точками примерно одинаковые. Чтобы в этом убедиться, надо провести некоторые довольно громоздкие вычисления, которых мы хотели бы здесь избежать. Вместо этого приведем краткое объяснение.

Как мы уже выяснили, рациональные приближения 2π порождают цепочки в некоторой степени близких точек, но насколько именно они близки, зависит от параметров графика. Например, на рисунке 8 приближение дробью $44/7$ дает цепочки близких точек, а другие приближения – нет. В случае же рисунка 7 три приближения дробями $44/7$, $25/4$, $19/3$ дают цепочки примерно одинаковых по близости точек. На рисунке 10 отмечены точка A_{500} и три точки, номера которых отличаются от 500 на знаменатели этих дробей – 44, 25 и 19.

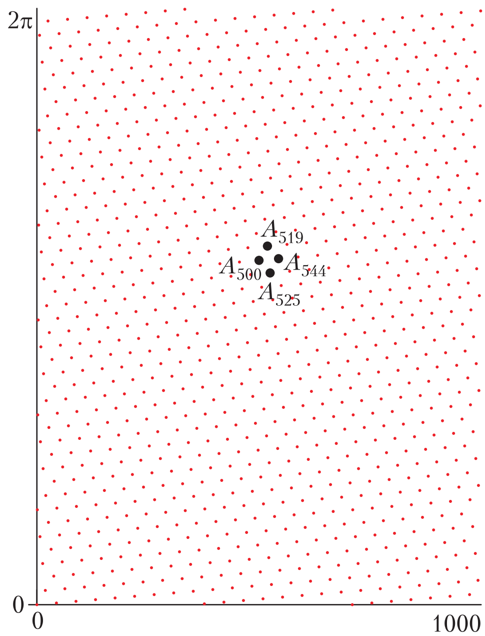


Рис. 10

Более подробно это доказательство изложено в уже упомянутой статье Нормана Ричерта.

Откуда берутся шестиугольники?

Мы выяснили, как можно объяснить треугольники на рисунке 7, но как появляются шестиугольники на рисунке 2?

Рисунок 2 мы получаем сворачиванием «в трубку» рисунка 7. При этом одна половина рисунка накладывается на другую. Появление шестиугольников можно объяснить так называемым эффектом муара: он возникает при наложении периодических узоров. Для примера на рисунке 11 показано, что получается при наложении друг на друга двух квадратных сеток. Об эффекте муара можно прочитать в статье З.Пятаковой, А.Пятакова «О муарах, оживших иллюстрациях и пользе моделей» («Квант», 2010, №6).

Отметим, что и при накладывании непериодических узоров тоже могут возникать интересные эффекты. Например, эффект, иллюстрирующий теорему Шаля, можно наблюдать на сайте «Математические этюды» (http://www.etudes.ru/ru/models/chasles-theorem/). Прочитать о нем можно в статье С.Дориченко, С.Шашкова и А.Шеня «Загадочные круги и движения плоскости» («Квант», 2009, №4).

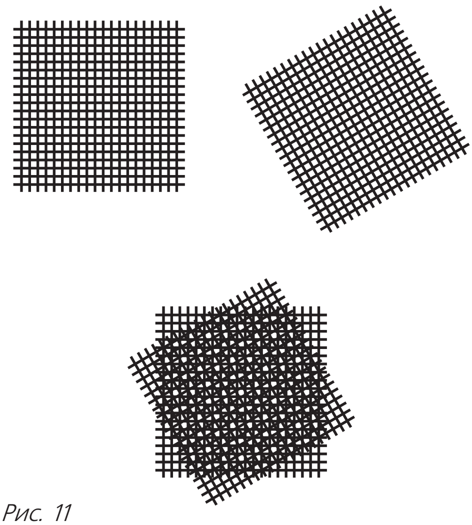


Рис. 11

Возвращаясь к общему случаю

Итак, мы разобрались со случаем $a = d = 1$ при конкретных размерах графиков. Рассуждая аналогично, получим, что цепочки близко расположенных точек возникают из удачных приближений числа $\frac{2\pi}{ad}$. Заметим, что если параметры a и d менять так, чтобы произведение ad было постоянным, то картинка никак не меняется.

Например, для первого графика из статьи П.Панова это выражение равно $\frac{2\pi}{0,001 \cdot 314} \approx 20,01$, что хорошо приближается дробью $20/1$. Этим можно объяснить появление 20 графиков синуса.

Как мы выяснили выше, получающаяся картинка зависит от параметров графика нетривиальным образом, поэтому дать простую формулу в ответ на основной вопрос этой статьи не получается. Но мы обозначили некоторые подходы к изучению частных случаев, которые, как мы надеемся, были интересны читателю.

Еще пара задач

Напоследок предлагаем подумать над такими задачами, связанными с затронутыми нами темами.

1. Батон колбасы разрезали под углом 45° к направляющей батона и сняли оболочку. Докажите, что ее граница это график синуса.

2 (И.Богданов, Всероссийская олимпиада по математике). Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a и b, такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

Литература

1. *Gilbert Strang.* Calculus (1991, pp.34–36).

2. *Norman Richert.* Strang's Strange Figures (The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 2 (Feb., 1992), pp. 101–107).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2598 – М2601 предлагались на весеннем туре XLI Турнира городов.

Задачи Ф2605–Ф2608 предлагались на заключительном туре Инженерной олимпиады школьников в 2019/20 учебном году. Автор задач – С.Муравьев.

Задачи М2598–М2601, Ф2605–Ф2608

М2598. Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один – со стороной не больше 1, а другой – со стороной не меньше 100?

М.Евдокимов

М2599. К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N черных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.)

Г.Погудин

М2600. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.

М.Дидин

М2601. Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$?

И.Митрофанов

Ф2605. Два маленьких шарика – легкий от пинг-понга и тяжелый каучуковый – бросают вместе на пол с высоты h (шарик от пинг-понга – сверху, каучуковый – снизу; рис.1). Шарики падают на землю, и каучуковый шарик отражается от земли. Считая, что все столкновения шариков упругие, что между шариками есть небольшой зазор и шарик от пинг-понга много легче каучукового шарика, найдите, на какую высоту подпрыгнет шарик от пинг-понга. Размеры шариков много меньше высоты h. Сопротивлением воздуха пренебречь.

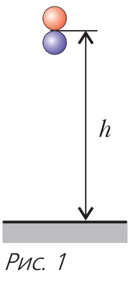


Рис. 1

Ф2606. Шесть одинаковых зацепляющихся зубчатых колес связаны рычагом, вращающемся с угловой скоростью ω относи-

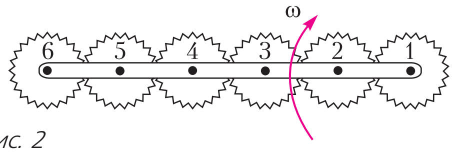


Рис. 2

тельно центра колеса 1, которое является неподвижным (рис.2). Найдите угловую скорость шестого колеса.

Ф2607. Инженеры-взрывотехники проводят испытание новых видов взрывчатки в открытом снизу толстостенном цилиндрическом «колоколе» массой M и радиусом R, стоящем на земле. Внутри колокола на его оси на высоте h от поверхности земли взрывается заряд массой m. Заряд разрывается на множество мелких осколков, разлетающихся с одинаковыми скоростями равномерно во все стороны. Считая, что все осколки либо уходят в землю, либо застревают в стенках колокола, что масса колокола много больше массы осколков и все осколки долетают до колокола практически одновременно, найдите высоту, на которую он подпрыгнет над землей. Суммарная кинетическая энергия осколков равна E.

Ф2608. Рассмотрим модель передачи вращения между двумя параллельными осями, основанную на трении. Два одинаковых конуса – ведущий и ведомый – прижимаются друг к другу по образующей (рис.3). Ведущий конус вращается с постоянной угловой скоростью ω, к его оси приложен момент внешних сил M. С какой угловой скоростью вращается ведомый конус? Конусы прижаты друг к другу равномерно по образующей с силой N. Угол при вершине конусов α, коэффициент трения между конусами μ, высота конусов h.

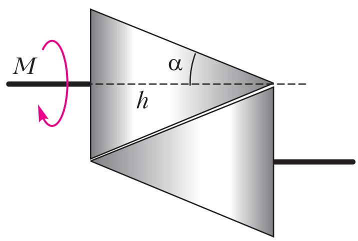


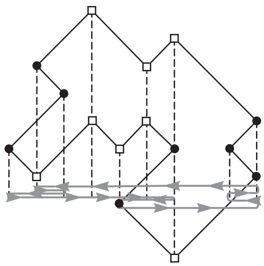
Рис. 3

Решения задач М2586–М2589, Ф2593–Ф2596

М2586. *Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовем две его вершины не дружными, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин четно.*

Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ⌐, ¬, ∟, ⌟. Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4. Обозначим количества вершин каждого типа через S_1, S_2, S_3, S_4. Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Ее левый конец может быть только типа 1 или 3, а правый – только типа 2 или 4. Каждая вершина является концом ровно одной горизонтальной стороны. Так как общее количество левых концов равно количеству правых концов, получаем $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$. Аналогичные рассуждения с вертикальными сторонами дают равенство $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Складывая полученные равенства, имеем $2S_1 = 2S_4$, откуда $S_1 + S_4 = 2S_4$ – четное количество. Задача решена.

Приведем схему еще одного из возможных решений. Расположим многоугольник так, чтобы биссектрисы углов задавали горизонтальное и вертикальное направления (см. рисунок). Пусть некая точка обходит периметр многоугольника. Тогда



проекция этой точки на горизонталь также меняет направление движения (делает разворот) ровно в те моменты, когда точка проходит вершину, в которой биссектриса внутреннего угла многоугольника горизонтальна.

М.Скопенков

М2587. *В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят а) ровно три фишки; б) ровно четыре фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?*

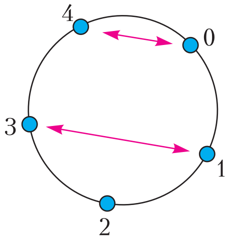
Ответ: а) за 50 рублей; б) за 61 рубль.

Занумеруем клетки по порядку от 1 до 100, а текущим номером фишки будем считать номер клетки, на которой она стоит.

а) *Оценка*. Пусть фишки переставили в обратном порядке. Тогда каждая фишка должна была поменять четность своего номера. Но заметим, что бесплатная операция не меняет четность номеров фишек, а платная операция меняет ее у двух фишек. Поэтому потребуется сделать не менее $100/2 = 50$ операций.

Пример. Предварительно заметим, что бесплатная операция не меняет остаток номера фишки при делении на 4 и, наоборот, можно бесплатно переставить в любом порядке 25 фишек, номера которых дают один и тот же остаток при делении на 4. Выполним 49 обменов: 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, …, 98–99. Затем бесплатными операциями фишку 1 переставим на клетку 5, а фишку 100 – на клетку 4, после чего поменяем их местами за 1 рубль. Теперь каждая фишка заняла клетку с номером нужного остатка при делении на 4, для того чтобы бесплатными операциями переставить их в порядке, обратном к исходному.

б) В этом пункте бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5. Наоборот, можно бесплатно переставить в любом порядке 20 фишек, номера которых дают один и тот же остаток при делении на 5. Для решения удобна следующая модель: разложим фишки в 5 кучек по 20 фишек, в кучку номер 0 – фишки с остатком 0 при делении на 5, в кучку номер 1 – фишки с остатком 1 при делении на 5 и так далее. Расположим кучки фишек по кругу – сначала кучка 0, потом – 1, и так далее до 4 (см. рисунок).



Теперь платная операция представляет собой *обмен* пары фишек из соседних кучек. Бесплатные операции можем больше не рассматривать (бесплатная операция «перемешивает» фишки внутри одной кучки). Нам требуется переложить все фишки из кучки 0 в кучку 4 и, наоборот, из кучки 4 в кучку 0, а также переложить все фишки из кучки 1 в кучку 3 и, наоборот, из кучки 3 в кучку 1; фишки из кучки 2 должны в итоге остаться в той же кучке.

Оценка. Каждая фишка из кучки 0 должна участвовать хотя бы в одном обмене между кучками, чтобы добраться до кучки 4. Аналогично для фишек кучки 4. Каждая фишка из кучки 1 должна участвовать хотя бы в двух обменах, чтобы добраться до кучки 3. Аналогично для фишек кучки 3. Значит, потребуется не менее $(20+20+40+40)/2 = 60$ обменов. Но если в доказанной оценке будет достигаться равенство (т.е. будет сделано ровно 60 обменов), то фишкам из кучки 1 придется идти через кучку 2, поэтому хотя бы одна фишка из кучки 2 будет участвовать в обмене. Следовательно, необходимо больше 60 обменов.

Пример. Сделаем 20 обменов, меняющих местами фишки из кучек 0 и 4. Далее, обозначим по-новому фишки, которые вначале были в кучке 1: 1.1, 1.2, …, 1.20, и аналогично занумеруем фишки в кучках 2 и 3. Выполним последовательно 41 обмен: 2.1–1.1, 1.1–3.1, 3.1–1.2, 1.2–3.2, 3.2–1.3, 1.3–3.3, 3.3–1.4, …, 1.20–3.20, 3.20–2.1. Нетрудно убедиться, что все фишки из кучки 2 остались в итоге в той же кучке, а фишки из кучек 1 и 3 поменялись местами.

Е.Бакаев

М2588*. *Точка M лежит внутри выпуклого четырехугольника ABCD на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и* *на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника ABCD равна*

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD.$$

Докажите, что четырехугольник ABCD а) вписанный; б) описанный.

а) Опустим перпендикуляры MP, MQ, MR, MT на прямые AB, BC, CD, DA соответственно (см. рисунок). Тогда

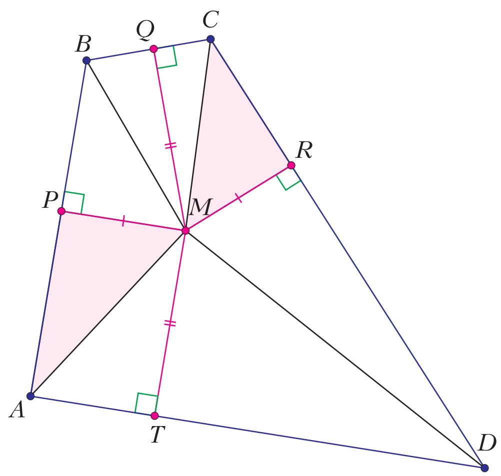
$$S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} \le$$
$$\le (S_{AMP} + S_{BMP}) + (S_{BMQ} + S_{CMQ}) +$$
$$+ (S_{CMR} + S_{DMR}) + (S_{DMT} + S_{AMT}) =$$
$$= (S_{AMP} + S_{CMR}) + (S_{BMP} + S_{DMR}) +$$
$$+ (S_{BMQ} + S_{DMT}) + (S_{CMQ} + S_{AMT}).$$

Заметим, что прямоугольные треугольники AMP и CMR имеют равные катеты MP и MR, поэтому из них можно сложить треугольник Δ, две стороны которого равны MA и MC, а значит,

$$S_{AMP} + S_{CMR} = S_{\Delta} \le \frac{1}{2} MA \cdot MC.$$

Аналогично,

$$S_{BMP} + S_{DMR} \le \frac{1}{2} MB \cdot MD,$$
$$S_{BMQ} + S_{DMT} \le \frac{1}{2} MB \cdot MD,$$
$$S_{CMQ} + S_{AMT} \le \frac{1}{2} MA \cdot MC.$$



Следовательно,

$$S_{ABCD} \le MA \cdot MC + MB \cdot MD.$$

Из условия видно, что все предыдущие неравенства на самом деле должны быть равенствами. Это значит, что, во-первых, точки P, Q, R, T лежат на соответствующих сторонах четырехугольника (а не на их продолжениях) и, во-вторых, треугольник Δ прямоугольный, т.е. $\angle MAP + \angle MCR = 90°$. Аналогично, $\angle MAT + \angle MCQ = 90°$, откуда $\angle BAD + \angle BCD = (\angle MAP + \angle MCR) + (\angle MAT + \angle MCQ) = 180°$, т.е. четырехугольник вписанный.

б) Из прямоугольного треугольника Δ (см. п. а) видно, что $AP + RC = \sqrt{MA^2 + MC^2}$. Аналогично, $BP + RD = \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Тогда

$$AB + CD = \sqrt{MA^2 + MC^2} + \sqrt{MB^2 + MD^2}.$$

Вычисляя похожим образом сумму $BC + DA$, мы получим тот же результат. Доказанное равенство $AB + CD = BC + DA$ означает, что данный четырехугольник – описанный.

Замечание. Можно доказать (например, с помощью трюка со «склеиванием треугольников», используемого в решении задачи), что площадь любого вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$, где M – центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$.

Н.Седракян

М2589*. *Дана возрастающая последовательность положительных чисел $\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_2 < \ldots$, бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, …, либо с некоторого момента постоянна.*

Очевидно, что $b_1 = 1$, а при $k > 1$ отношение из условия меньше k, поэтому $b_k \le k$ при всех натуральных k. Если последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ не совпадает с натуральным рядом, то $b_k \le k-1$ при некотором $k > 1$. Тогда $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+k-1} \le$ $\le (k-1)a_{i+k-1}$ для каждого целого i, откуда $ka_i < (k-1)a_{i+k-1}$. Обозначив $t = \frac{k-1}{k} < 1$, получаем $a_i < ta_{i+k-1} < ta_{i+k}$ при всех целых i. Следовательно,

$$a_i < t \cdot a_{i+k} < t^2 \cdot a_{i+2k} < \ldots < t^q \cdot a_{i+qk}. \quad (*)$$

Неформально, $(*)$ говорит о том, что (a_i) возрастает «не слишком быстро». Фактически (с учетом возрастания (a_i)), в $(*)$ показано, что если есть два номера m и n, где $m > n$, то отношение $\frac{a_n}{a_m}$ меньше 1, когда $m - n < k$; $\frac{a_n}{a_m} < t$, когда $m - n < 2k$; $\frac{a_n}{a_m} < t^2$, когда $m - n < 3k$, и т.д. Чтобы оценить сверху произвольное b_n, оценим сверху отношение

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} = \frac{a_{i+n}}{a_{i+n}} + \frac{a_{i+n-1}}{a_{i+n}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{a_{i+n}}.$$

В этой сумме первые k слагаемых не превосходят 1, следующие k не превосходят t, следующие k не превосходят t^2 и т.д. Итак,

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} < k\left(1 + t + t^2 + \ldots\right) = \frac{k}{1-t} = k^2.$$

Это значит, что $b_n \le k^2$ при любом натуральном n. Поскольку последовательность (b_n), очевидно, не убывает, то она стабилизируется на числе, не большем k^2.

А.Шаповалов

Ф2593.[1] *Две одинаковые по длине дорожки в парке заметены снегом. Два дворника, Вася и Петя, должны очистить дорожки от снега. Первую дорожку они начали чистить с двух концов, и, когда она была очищена, выяснилось, что Вася очистил 20 метров длины. Вторую дорожку они тоже начали чистить с двух концов, но теперь Вася увеличил скорость в 3 раза, а Петя сохранил прежний темп. Когда обе дорожки были очищены, оказалось, что на Васину долю пришлось всего 50 метров. А сколько метров дорожек очистил Петя?*

Обозначим Васину долю очищенных дорожек через x. Тогда $(x+50)/2$ – это длина одной дорожки. Введем обозначение α для отношения скоростей движения Васи и Пети при очистке первой дорожки: $\alpha = v_{\text{Васи}}/v_{\text{Пети}}$. Тогда справедливы такие соотношения:

$$20 = \left(\alpha/(1+\alpha)\right) \cdot (x+50)/2,$$

$$50 - 20 = \left(3\alpha/(1+3\alpha)\right) \cdot (x+50)/2.$$

Получилась система из двух уравнений с двумя неизвестными. Разделим левые и правые части этих уравнений друг на друга и получим

$$3/2 = 3(\alpha+1)/(1+3\alpha).$$

Отсюда находим, что $\alpha = 1$. Подставив это значение в любое из уравнений, получим $x = 30$ м.

Ф2594. *Для переправки цистерн с нефтепродуктами по Каспийскому морю из Баку в Астрахань во время второй мировой войны их заполняли не полностью, и в этом случае стальная цистерна вместе со стальной платформой и стальными колесами плавала в воде. Грузоподъемность современной цистерны для перевозки бензина 60 т. Это при полном заполнении кузова – емкости для хранения жидкости. Масса тары цистерны 23,4 т, объем кузова 73,1 м^3. Какое максимальное количество бензина (в тоннах) можно переправить морем таким способом в одной цистерне за один рейс? Плотность стали 7,8 т/м^3, плотность воды в Каспии – примерно 1 т/м^3.*

Объем всех стальных частей одного транспортного средства равен

$$(23{,}4 \text{ т})/7{,}8 \text{ т/м}^3 = 3 \text{ м}^3.$$

Если цистерна с бензином будет целиком погружена в воду, то суммарный объем

[1] Автор решений задач Ф2593–Ф2596 – С.Дмитриев.

погруженного тела будет $3\ м^3 + 73{,}1\ м^3 = 76{,}1\ м^3$. Следовательно, суммарная масса тары и бензина не должна быть больше 76,1 т. Отсюда находим максимальную массу бензина в одной цистерне:

$$76{,}1\ т - 23{,}4\ т = 52{,}7\ т.$$

Ф2595. *«Водность» тумана (облака) – это общая масса водяных капелек в единице объема тумана. Над землей на высоте 1 км находится неподвижное облако с водностью 3 г/м^3. Облако окружено прозрачным воздухом, температура которого 273 К, а давление 10^5 Па. Какова средняя температура внутри облака? Давление насыщенных паров воды при 273 К равно 611 Па.*

Разумно предположить, что температура внутри облака не сильно отличается от температуры воздуха вне облака. При указанных в условии температуре и давлении прозрачного, а значит, сухого воздуха, окружающего облако, его плотность

$$\rho_{сух} = pM/(RT) = 1278{,}3\ г/м^3.$$

В подсчете было учтено, что молярная масса сухого воздуха $M_{сух} = 29$ г/моль. Плотность влажного воздуха без капель внутри облака

$$\rho_{вл} = 1278{,}3\ г/м^3 - 3\ г/м^3 = 1275{,}3\ г/м^3.$$

Внутри облака в воздухе кроме капель находится и насыщенный пар воды. Давление насыщенного водяного пара при температуре, близкой к 273 К, около 611 Па. Таким образом, из 10^5 Па примерно 611 Па созданы водяным паром. Из этого следует, что средняя молярная масса влажного воздуха

$$M_{вл} = \left(1 - 611/10^5\right) \cdot 29\ г/моль + \left(611/10^5\right) \cdot 18\ г/моль \approx 28{,}933\ г/моль.$$

Тогда температура внутри облака равна

$$T = pM_{вл}/(R\rho_{вл}) = 273{,}009\ К.$$

Иными словами, температура внутри облака всего на 0,009 К выше, чем у окружающего облако прозрачного сухого воздуха. При такой разнице температур процесс установления теплового равновесия идет очень медленно и время жизни облака велико.

Ф2596. *Чайник потребляет от электрической сети мощность 2 кВт. Масса воды, которую Вася с небольшим запасом наливает в чайник, равна 0,3 кг (а в чашку помещается 0,2 л воды). В таком чайнике Вася нагревает для приготовления чая чистую и первоначально холодную (20 °С) воду, доводя ее до кипения. Как только вода (через одну минуту после включения чайника) начинает кипеть, Вася тут же отключает чайник от сети, но вода продолжает кипеть еще примерно 10 секунд. Каков КПД использования электроэнергии, если считать полезной только то количество теплоты, которое нужно, чтобы вода, наливаемая в чашку, имела температуру 100 °С? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К).*

Если предположить, что вся мощность, потребляемая чайником от сети, досталась воде, то время до закипания воды составило бы

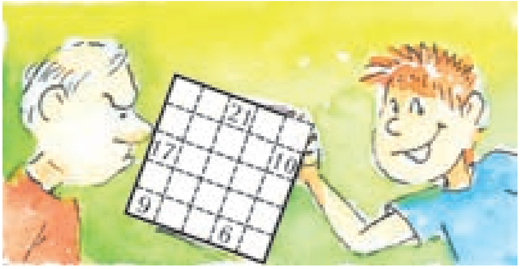
$$4200\ Дж/(кг \cdot К) \cdot 0{,}3\ кг \cdot 80\ К/2000\ Вт = 50{,}4\ с.$$

А поскольку вода закипела только через минуту, то это означает, что нагревание воды началось не сразу. Первые приблизительно 10 секунд греется сам нагревательный элемент, а после выключения чайника как раз эти же 10 секунд вода еще продолжает кипеть, поскольку нагревательный элемент нагревается до температуры, которая гораздо выше 100 °С. В условии задачи нужно найти отношение количества теплоты, которое потребовалось для нагревания 200 г воды до кипения, к общей энергии, полученной от электрической сети. В этом случае КПД равен

$$(200/300) \cdot (50{,}4/60) \cdot 100\% = 56\%.$$

Задачи

1. На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На нашем рисунке мы



скрыли от вас все внутренние стенки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно привести пример.

М.Евдокимов, А.Хачатурян

2. На столе лежат 6 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня разложила их по 3 на две чашки весов, и весы остались в равновесии. А Саша разложил те же яблоки по-другому: 2 яблока на одну чашку и 4 на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашку

весов одно яблоко, а на другую два так, что весы останутся в равновесии.

А.Шаповалов

3. Пункты *A*, *B*, *C*, *D* расположены в вершинах прямоугольника *ABCD*, его стороны – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $A-B-C-D$, а вторая проехала за час по маршруту $A-D-C-B$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно

выедут из пункта *A* в разных направлениях и поедут по сторонам прямоугольника *ABCD*? (Скорости обеих машин постоянны.)

Н.Агаханов

4. В лесу живет 40 зверей – лисицы, волки, зайцы и барсуки. Ежегодно они устраивают бал-маскарад: каждый надевает маску животного другого вида, причем два года подряд они одну и ту же маску не носят. Два года назад на балу было 12 «лисиц» и 28 «волков», год назад – 15 «зайцев», 10 «лисиц» и 15 «барсуков», а в этом году – 15 «зайцев» и 25 «лисиц». Каких зверей в лесу больше всего?

М.Хачатурян

Иллюстрации Д.Гришуковой

Задачи 1, 2, 4 предлагались на Математическом празднике, задача 3 – на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области.

Примеры и контрпримеры

А.КАНУННИКОВ

Об одном признаке делимости

Начнем с такого *примера*. Хорошо известен признак делимости на 3: число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Верен аналогичный признак делимости на 9. Например, 145287 кратно 9, так как $1+4+5+2+8+7=(1+8)+(4+5)+(2+7)=$ $=3\cdot 9$ кратно 9. Справедлив ли аналогичный признак делимости на 27? Возьмем, к примеру, наименьшее число с суммой цифр 27: 999. Легко видеть, что оно кратно 27 (достаточно разделить его на 9 и получить число 111, кратное 3). Возьмем другой пример: 11…11 (27 единиц). Разделив его на 3, получим число из 9 блоков 037:

$$111\ 111\ \ldots\ 111 : 3 = 37\ 037\ \ldots\ 037.$$

Сумма цифр полученного частного равна $(3+7)\cdot 9$ и кратна 9, значит, само частное делится на 9, а тогда исходное число из 27 единиц делится на 27. Мы разобрали два примера, но даже если бы нашли миллион подтверждающих примеров, мы бы не доказали признак. Напротив, число 9981 показывает, что наш признак неверен: хотя 9 + 9 + 8 + 1 = 27, но 9981 не кратно 27, так как 9981 : 9 = 112 не кратно 3. Число 9981 опровергает неверный признак делимости на 27. Вообще, пример, который опровергает какое-то утверждение, называется *контрпримером*. Приведем шуточную «теорему»: в математике нет терминов, в названии которых пять согласных идут подряд. Само слово «контрпример» является контрпримером к этой «теореме».

Упражнения

1. Найдите самый маленький контрпример к «признаку делимости на 27», т.е. такое наименьшее натуральное число, не кратное 27, сумма цифр которого кратна 27.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200403

2*. Признак делимости на 27 с суммой цифр неверен в десятичной системе счисления. Подумайте, почему в ней верны признаки делимости на 3 и 9, и попробуйте понять, в каких системах счисления верен аналогичный признак делимости на 27.

Об одном признаке равенства треугольников

Перейдем к геометрии. Вполне очевидно, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис.1). Это утверждение называется первым признаком равенства треугольников. Коротко говорят так: треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Давайте подумаем, а будет ли верен аналогичный признак, если слова «между ними» заменить словами «не между ними» (рис.2.) В подтверждение этой гипотезы говорит известный факт, что прямоугольные треугольники равны по катету и гипотенузе: прямой угол лежит

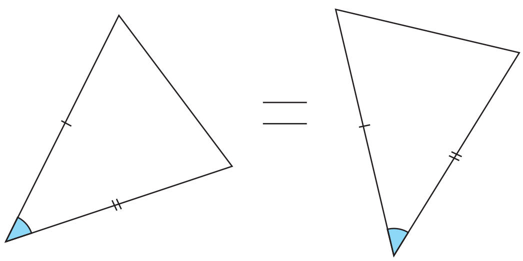


Рис. 1

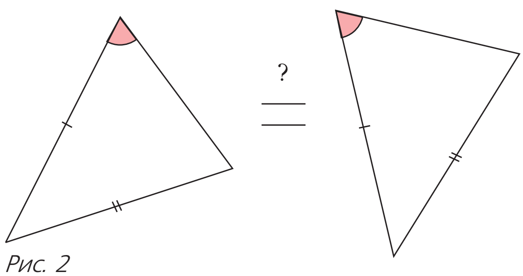


Рис. 2

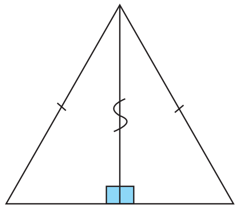


Рис. 3

как раз не между ними. Нам будет полезно вспомнить, как доказывается этот признак. Это совсем несложно: нужно приложить прямоугольные треугольники друг к другу, чтобы их равные катеты совпали (рис.3). Тогда из них сложится равнобедренный треугольник (его боковые стороны – это гипотенузы наших прямоугольных треугольников, равные по условию). Высота, проведенная к его основанию, является также и медианой, поэтому наши прямоугольные треугольники равны по двум катетам.

Более общий признак равенства треугольников «по двум сторонам и углу не между ними» оказывается неверен, а привести контрпример помогает конструкция из доказательства с прямоугольными треугольниками. Давайте возьмем произвольный равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и разделим его отрезком BK на два треугольника, взяв точку K на AC, но не в середине (рис.4). Как видим, условия «признака» выполняются: $AB = BC$, сторона BK общая, $\angle BAK = \angle BCK$, в то время как треугольники ABK и CBK явно не равны: один остроугольный, другой тупоугольный.

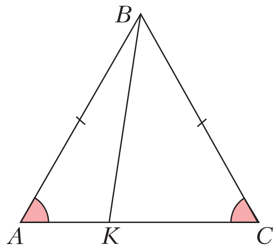


Рис. 4

Итак, мы опровергли неверный признак, приведя контрпример. Но, что куда интереснее, этот контрпример по существу единственно возможный, т.е. из любых двух неравных треугольников, удовлетворяющих условию «признака», можно составить равнобедренный треугольник, как на рисунке 4.

Упражнение 3. Попробуйте это доказать.

В частности, если дополнительно потребовать, чтобы оба треугольника были остроугольными или тупоугольными, то признак станет верным.

Доказывать или опровергать?

Во многих задачах нужно что-то доказать. Другие задачи начинаются со слов «Приведите пример…». Но часто задачи формулируются в виде вопроса «Можно ли…?» Такие формулировки приближены к исследованиям ученых, в которых заранее ответ неизвестен. По этому поводу академик Андрей Николаевич Колмогоров советовал поочередно пытаться доказывать и опровергать неясные гипотезы. Даже если не удается сразу придумать контрпример, такие рассуждения подсказывают направление поиска, отсекая все лишнее и сужая круг поиска: «Если пример и существует, то в нем обязательно…» Или, наоборот, при проверке доказательства удается обнаружить брешь в рассуждениях и привести контрпример.

Задача 1. *Можно ли, используя цифры от 1 до 9 каждую по разу, записать пять чисел, каждое из которых (кроме первого) делится на предыдущее?*

Можно или нельзя? Если нельзя, то не вполне понятно, как это выяснить, разве что длинным перебором… Попробуем доказать, что можно, подобрав пример. Как лучше располагать цифры? Из соображений экономии начнем с самой маленькой цифры 1 и будем увеличивать числа в наименьшее число раз – в два раза. Так мы запишем четыре числа: 1, 2, 4, 8. Для утвердительного ответа на вопрос задачи осталось из цифр 3, 5, 6, 7, 9 составить число, кратное 8. Для этого необходимо и достаточно, чтобы три последние цифры образовывали число, кратное 8. Очевидно, последней может быть только шестерка (остальные цифры нечетны). Несложно подобрать, что 376 подходит. Поэтому в качестве последнего, пятого числа можно взять 59376.

Ответ: да, можно, например: 1, 2, 4, 8, 59376.

Упражнение 4. Найдите все возможные варианты пятого числа после 1, 2, 4, 8.

Вот еще один задача на делимость, потруднее.

Задача 2. *Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму* *по очереди, делится ли оно на* 2; *на* 3;… *на* 9. *На все восемь вопросов Дима ответил верно, причем ответов «да» и «нет» было поровну. а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа? б) А хотя бы на два вопроса?*

Конечно, если мы можем ответить на два вопроса, то и на один тем более. Поэтому, «по законам жанра», скорее всего, ответ в пункте а) – да, а в пункте б) – нет. Разумеется, это не гарантированно. Но согласитесь, было бы странным задавать два вопроса, если даже на один мы однозначно ответить не можем.

Начнем с того, что попробуем придумать пример к пункту а). Напрашивается проверить ответ на первый вопрос учительницы – про делимость написанного (и неизвестного нам) числа N на 2. Если ответ «нет», то число нечетно и поэтому не делится также ни на 4, ни на 6, ни на 8. Поскольку ответов «делится» и «не делится» поровну, значит, на оставшиеся четыре числа 3, 5, 7, 9 число N должно делиться. Но тогда оно делится на $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ и никак не двузначное. Полученное противоречие показывает, что число N точно делится на 2, так что ответ в пункте а) утвердительный.

Перейдем к пункту б). Интуиция нам подсказывает, что ответ «нет», но мы этого точно не знаем. Назовем двузначное число *хорошим*, если учительница могла его написать на доске, т.е. если оно делится ровно на четыре числа от 2 до 9. В пункте а) мы доказали, что всякое хорошее число четное. Будем пытаться доказать ответ «да» в пункте б), т.е. найти число от 3 до 9, на которое точно делится или точно не делится каждое хорошее число.

Найдется ли, к примеру, хорошее число, кратное 9? Если да, то оно также кратно 3, а еще 2, а тогда и 6. Уже 4 делителя: 2, 3, 6, 9. Наименьшее такое число 18 – оно и вправду хорошее. Попробуем теперь найти хорошее число, кратное 8. Оно автоматически делится на 2 и 4 – уже три делителя. Если оно делится на 3, то тогда и на 6 – уже пять делителей. Но оно может делиться на 5: 40 – хорошее число с делителями 2, 4, 5, 8.

Примеры чисел 18 и 40 показывают, что нельзя однозначно ответить, делится ли хорошее число на 3, 4, 5, 6, 8, 9 или нет: всякий раз ответы для чисел 18 и 40 разные. Нам осталось определиться с семеркой: 18 и 40 на 7 не делятся. Существует ли хорошее число, кратное 7? Да, легко привести пример, взяв вместо числа $40 = 8 \cdot 5$ число $56 = 8 \cdot 7$. Вот мы и доказали, что ответ к пункту б) – «нет».

Задача 3. *а) Может ли работа фирмы за любые пять месяцев быть прибыльной, а за весь год – убыточной? б) Может ли такое положение продолжаться в течение шести лет? (Иными словами, по итогам любых пяти подряд идущих месяцев фирма получает прибыль, а по итогам каждого из шести лет – терпит убыток.)*

На первый взгляд, такого быть не может, но давайте не спешить с выводами. В пункте б) отрезок в шесть лет указан «для отвода глаз». На самом деле, описанная ситуация невозможна даже в течение пяти лет – ведь такой отрезок времени делится на 12 отрезков по пять месяцев и все они прибыльные по условию. Итак, в пункте б) ответ «нет».

Перейдем к пункту а), еще не зная, приведут ли наши размышления к примеру или к опровержению. Переформулируем вопрос на математическом языке: может ли сумма 12 чисел быть отрицательной, в то время как сумма 5 любых подряд идущих из них положительна? Если да, то сумма первых десяти чисел положительна, а тогда сумма двух последних отрицательна. С другой стороны, верно симметричное заключение: сумма первых двух чисел отрицательна, а десяти остальных – положительна. Наконец, рассмотрев крайние пятерки чисел, получим, что сумма двух чисел в середине отрицательна. Для приведения примера учтем еще, что 1-е и 12-е числа участвуют каждое только в одной пятерке, так что переложим на них «основную ответственность за убыток». Из этих соображений уже несложно придумать пример:

$$-5, 0, 2, 2, 2, -1, -2, 2, 2, 2, 0, -5.$$

Вся сумма равна –2. Аккуратно проверьте каждую пятерку подряд идущих чисел.

Кто больше, или «Оценка + пример»

Очень часто в задачах нужно не только привести пример, но и доказать его оптимальность в каком-то смысле (наибольшее число, наименьшее время работы и т. д.). Соответственно, решения таких задач состоят из двух частей. Когда мы приводим пример, нам нужно только показать, что он удовлетворяет условию. При доказательстве же оптимальности недостаточно привести несколько контрпримеров, мол, у нас лучше не получилось. Необходимо доказать, что *ни у кого* лучше не получится!

Задача 4. *В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма меда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество меда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?*

Если Кролик разольет мед поровну, то Пуху достанется 6/5 кг. Но Кролик может поступить хитрее: разлить по килограмму в горшочки 1, 3 и 5, и тогда Пух возьмет 1 кг. Может ли экономный Кролик спасти еще больше меда? Перебрав варианты, приходим к гипотезе, что нет. Докажем это и заодно покажем, как можно прийти к ответу 1 кг, если мы сразу не догадались до хитроумного способа Кролика.

Пусть Пух может гарантированно забрать только x кг и не больше. Это значит, что как бы ни разливал Кролик мед, в каждой паре горшочков (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) не более x кг, причем в какой-то паре ровно x кг. Сложив содержимое пар (1, 2), (3, 4) и добавив 5-й горшочек (в котором тоже не более x кг), получим, что общая масса не более $3x$ кг (рис.5). Но по условию она равна 3 кг. Итак, $3 \le 3x$, т.е. $x \ge 1$. Значит, Кролик может не надеяться спасти больше двух килограммов меда. Кстати, из этого рассуждения получается и выше приведенный пример, и его единственность. Именно, чтобы x был равен 1, необходимо, чтобы в 5-м горшочке меду было ровно 1 кг. Но тогда, симметрично, и в 1-м горшочке ровно 1 кг. Теперь ясно, что во 2-м и 4-м горшочках должно быть пусто, а в 3-м – 1 кг.

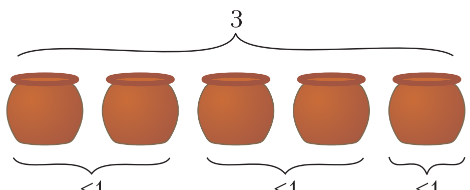


Рис. 5

Упражнение 5. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2, сын – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. За какое наименьшее время семья сможет перейти мост?

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

29. Положительные числа x и y таковы, что

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \atop 2016+\cfrac{2017}{2018+\cfrac{2019}{2020+x}}}}} > \cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \atop 2016+\cfrac{2017}{2018+\cfrac{2019}{2020+y}}}}}.$$

Что больше: x или y?

С.Дворянинов

30. На доске написаны числа 1, 2, … …, 2020. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел a и b сумма $a + b$ не делилась на разность $a - b$?

Фольклор

31. В окружность вписан 1000-угольник, его вершины покрашены поочередно в красный и синий цвета. Каково наибольшее возможное количество красных вершин, углы при которых меньше 179° ?

Б.Френкин

32. Рассмотрим плоскость с декартовыми координатами. Можно ли разделить ее на многоугольники так, чтобы строго внутри каждого многоугольника была точка с целыми координатами, а также чтобы

а) площадь каждого многоугольника была меньше 0,9;

б) существовало такое d, что у каждого многоугольника диаметр меньше d, а площадь меньше 0,9;

в) существовало такое d, что у каждого многоугольника диаметр меньше d, а площадь меньше 1?

(*Диаметром* многоугольника называется наибольшее из расстояний между двумя точками на его границе. Например, диаметр квадрата со стороной 1 равен $\sqrt{2}$.)

Е.Бакаев

Не чихать: пандемия!

А.СТАСЕНКО

Всем известно изображение коронавируса – рогатый шар, нечто вроде морской мины. Но, конечно, очень маленький: не всякий микроскоп поможет его разглядеть. Известны и рекомендации гражданам – держаться друг от друга на расстоянии не менее 1,5–2 м. Ожидается, что при соблюдении этого расстояния вирусы, разлетающиеся в воздухе при кашле или чихании одного субъекта, упадут к ногам другого субъекта, что снижает возможность воздушно-капельного заражения. Конечно, при этом вирусы не голые, не сухие – они окружены слоем жидкости, так что такая сложная частица уже массивнее самого вируса.

И тут возникает желание сделать кое-какие оценки. Известно, что на шарик радиусом a, движущийся в воздухе со скоростью v, действует сила сопротивления – так называемая сила Стокса, пропорциональная скорости: $F = 6\pi\mu a v$, где μ – вязкость воздуха. Напишем для нашей частицы уравнение второго закона Ньютона:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\mu a v}{m} = -\frac{v}{\tau},$$

откуда получим выражение для скорости в любой момент времени t:

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Обе формулы содержат «время релаксации»

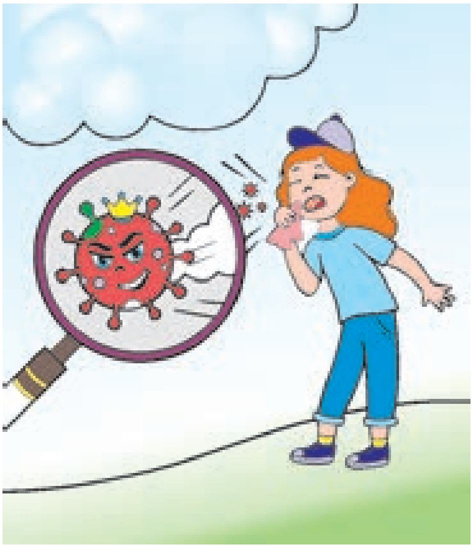
$$\tau = \frac{m}{6\pi\mu a} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\rho_0 a^2}{\mu}$$

– характерный масштаб времени, за которое частица тормозится в несущей ее среде.

Видно, что чем мельче частица и/или чем больше вязкость среды, тем меньше время релаксации. Так, для капли воды радиусом $a = 0,1$ мм $= 10^{-4}$ м это время составляет

$$\tau = \frac{2}{9}\cdot\frac{10^3\cdot\left(10^{-4}\right)^2}{1,5\cdot 10^{-5}}\text{ с} \sim 0,1\text{ с}.$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200404



Здесь использованы значения плотности воздуха $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3 и вязкости воздуха $\mu = 1,5\cdot 10^{-5}$ Па · с.

Значит, такая частица очень быстро будет увлечена воздухом. Поэтому, например, при ее свободном падении быстро наступит равновесие между силами сопротивления и тяготения, действующими на частицу:

$$mg = 6\pi\mu a v,$$

откуда установившаяся скорость вертикального перемещения (падения) частицы будет равна

$$v = g\tau.$$

Следовательно, с высоты $h = 1,5$ м наша частица упадет на пол за время

$$t = \frac{h}{v} = \frac{h}{g\tau} \sim \frac{1,5}{10\cdot 0,1}\text{ с} = 1,5\text{ с}.$$

А при характерном значении вызванной чиханием горизонтальной скорости воздуха порядка 1 м/с получим расстояние, пройденное частицей вируса, равным 1,5–2 м.

Эти оценки говорят, между прочим, и о том, что выбранное выше значение радиуса «мокрого» вируса $a = 0,1$ мм вполне разумно с точки зрения официально рекомендованных расстояний между субъектами.

Впрочем, желающие могут подставить свои численные значения определяющих параметров и вычислить свое безопасное расстояние до собеседника.

Дышите на здоровье!

А.МИНЕЕВ

В данной статье речь пойдет о воздействии на человека кислорода и углекислого газа – по отдельности и вместе. Некоторую настоящую интригу придает взгляд на проблему как *извне* – со стороны вдыхаемого воздуха, так и *изнутри* – внутри самого организма. Или, более научно, как со стороны *внешнего* дыхания – обмена между атмосферой и клетками в легких, так и *внутреннего* дыхания – процессы в клетках и тканях организма.

Среднее значение давления земной атмосферы на уровне моря примерно равно $p_{атм} = 760$ мм рт. ст. На долю кислорода приходится 160 мм рт. ст. или приблизительно 21%. Кислород частично усваивается организмом, углекислый газ образуется в результате химических реакций окисления. Состав вдыхаемого и выдыхаемого воздуха приведен в таблице.

Таблица 1. Состав вдыхаемого и выдыхаемого воздуха

	O_2	CO_2	Ar	N_2
Вдыхаемый воздух	21 %	0,04 %	0,9 %	78 %
Выдыхаемый воздух	16 %	4 %	0,9 %	78 %

Чем интересны эти цифры? Азот и аргон не используются организмом человека (являются инертными). Степень усвоения кислорода невелика, около 0,25. После вдоха организм выдыхает обратно основную часть кислорода. Углекислый газ практически отсутствует во вдыхаемом воздухе и активно образуется при окислительных реакциях в организме. Процент поглощения организмом кислорода (21% – 16% = 5%) оказывается близким к проценту образования углекислого газа (4%).

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200405

Инертность азота и аргона при обменных процессах в организме привела к соблазну вообще отказаться от них в условиях длительного пребывания в замкнутом пространстве. По этому пути пошли американские астронавты в первых космических полетах, перейдя на дыхание чистым кислородом. При этом давление в случае использования только O_2 было существенно ниже атмосферного и составляло 260–280 мм рт. ст. Однако по мере увеличения длительности космических полетов в такой чисто кислородной атмосфере у астронавтов стали появляться проблемы с дыхательными путями. К тому же, чисто кислородная атмосфера пожароопасна. Российские космонавты с самого начала использовали состав воздуха, близкий к земному, что потребовало более сложной системы регенерации воздуха. В настоящее время при полетах в космосе и в плавании на подводных лодках используется земной состав атмосферы.

Взгляд снаружи

Диапазон концентрации кислорода в воздухе, пригодный для жизни. Диапазон содержания кислорода в воздухе p_{O_2}, при котором возможна жизнедеятельность человека *в течение длительного времени*, ограничен значениями

$$90-100 \text{ мм рт. ст.} < p_{O_2} < 400-450 \text{ мм рт. ст.}$$

Нижняя граница соответствует началу кислородного *голодания*, верхняя – началу кислородного *отравления*. В процентном отношении наступление кислородного голодания у здорового человека наступает уже при содержании O_2 в воздухе $p_{O_2}/p_{атм}$ менее 14% (при $p_{атм}$ = 760 мм рт. ст.).

Эти данные соответствуют диапазону жизнедеятельности человека на уровне моря. По мере подъема в горы давление снижается, что наглядно отражают кривые атмосферного давления и парциального давления кислорода (рис.1).

Видно, что начиная с высот 4,5–5 км давление кислорода становится ниже допустимой нижней границы давления в 90 мм рт. ст. При этом давление воздуха в альвеолах составляет 105–110 мм рт. ст., что также близко к нижней границе. По мере уменьшения давления кислорода до уровня

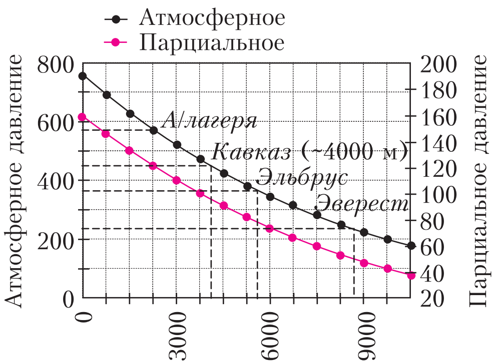


Рис. 1. Зависимость атмосферного давления и парциального давления кислорода (мм рт. ст.) от высоты местности над уровнем моря (метры). Показаны высоты альпинистских лагерей, гор Кавказа, Эльбруса и Эвереста

100 мм рт. ст. замедляются обменные процессы в организме, дыхание и сердцебиение учащаются, ухудшаются зрение и работа мозга… Вот почему высоко в горах люди *постоянно* жить не могут. В то же время вблизи верхней границы давления кислород начинает раздражать верхние дыхательные пути, появляется сухость в горле, кашель…

Оценка времени развития кислородной недостаточности при нахождении в замкнутом объеме. В качестве примера рассмотрим несколько ситуаций с людьми, находящимися в замкнутом объеме: один человек, застрявший в лифте объемом $V = 2$ м^3; два человека в комнате с $V = 30$ м^3; сто человек, застрявшие в остановившемся вагоне метро с $V = 250$ м^3.

В каждом случае найдем, за какое время Δt в замкнутом объеме V в процессе спокойного дыхания людей концентрация кислорода снижается от первоначального уровня 21% до начала кислородной недостаточности, т.е. до 14%. Подчеркнем – *спокойного,* поскольку при панике это время сильно снижается. Спокойному дыханию соответствует потребление кислорода на уровне 0,25 литра в минуту. Поскольку 1 литр O_2 соответствует 5 ккал энергии, то 0,25 л/мин сообщает организму за сутки $0{,}25 \times 5 \times 60 \times 24$ ккал = = 1800 ккал энергии. Так как плотность человеческого организма около 1000 кг/м^3, тело массой 70 кг занимает объем 0,07 м^3 или 70 литров. Добавив одежду, получим оценку объема, вытесняемого из замкнутого помещения, в 100 литров или 0,1 кубометра на человека.

Лифт. Свободный объем, занятый воздухом, составляет 1,9 м^3. В этом объеме содержится $1{,}9 \times 0{,}21$ м^3 = 0,4 м^3 = 400 л кислорода. Признаки кислородной недостаточности развиваются, когда полезный объем кислорода уменьшится до $1{,}9 \times 0{,}14$ м^3 = = 0,27 м^3 = 270 л. Изменение объема от 400 литров до 270 литров при потреблении кислорода одним человеком 0,25 л/мин займет время $\Delta t_{O_2} = 130/0{,}25$ мин = 520 мин, т.е. более 8 часов.

Комната. Свободный объем около 30 м^3. Начальный объем кислорода 6,3 м^3. Минимально допустимый объем кислорода 4,2 м^3. Потребление кислорода 0,5 л/мин. Время $\Delta t_{O_2} = 2100/0{,}5$ мин = 4200 мин, т.е. почти трое суток (!).

Вагон метро. Свободный объем около 240 м^3. Начальный объем кислорода 50 м^3. Минимально допустимый объем кислорода 34 м^3. Потребление кислорода около 25 л/мин. Время $\Delta t_{O_2} = 16000/25$ мин = = 640 мин, т.е. около 10 часов.

Во всех указанных случаях (если нет паники) время развития кислородной недостаточности очень велико. Однако, такой вывод находится в противоречии с житейским опытом: в метро и застрявшем лифте бывает душно и даже после сна в комнате с закрытой форточкой наутро ощущается духота. По всей видимости, имеет место другой, более мощный механизм развития неблагоприятных ощущений в процессе дыхания при нахождении в замкнутом объеме, не связанный с потерей кислорода из воздуха. Оказывается, таким механизмом является *накопление углекислого газа.*

Концентрация углекислого газа в воздухе, пригодная для жизни. Диапазон допустимого содержания CO_2 в воздухе составляет

$$0 < C_{CO_2} = \frac{p_{CO_2}}{p_{атм}} < 0{,}1\%.$$

Отметим, что обычное содержание углекислого газа в воздухе $C_{CO_2} = 0{,}04\%$.

Величину принятого ограничения сверху на содержание углекислого газа ($C_{CO_{2max}} = 0{,}1\%$) обсудим чуть позже, а сначала проведем оценки для замкнутых объемов лифта, комнаты, вагона метро и школьного класса применительно ко времени накопления концентрации углекислого газа до верхней границы. Примем, что взрослый человек обычно выдыхает углекислого газа в атмосферу $q_{CO_2} = 0,25$ л/мин.

Лифт. Свободный объем, занятый воздухом, равен 1,9 м^3. Изменение уровня содержания CO_2 в воздухе от 0,04% до 0,1% займет

$$\Delta t_{CO_2} = \frac{\left(C_{CO_2 \max} - C_{CO_2}\right) \cdot V}{q_{CO_2}} =$$

$$= \frac{\left(1 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 1,9 \cdot 10^3}{0,25} \text{ мин} = 5 \text{ мин}.$$

Комната. Свободный объем около 30 м^3. Изменение уровня содержания CO_2 в воздухе от 0,04% до 0,1% займет $\Delta t_{CO_2} = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \cdot 10^3/(2 \cdot 0,25)$ мин $= 36$ мин.

Вагон метро. Свободный объем около 240 м^3. Изменение уровня содержания CO_2 в воздухе от 0,04% до 0,1% займет $\Delta t_{CO_2} = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^3/(100 \cdot 0,3)$ мин ≈ 6 мин.

Школьный класс. Приведем также оценки для школьного класса объемом около 200 м^3, в котором находится 25 учеников. При уровне выдоха CO_2 одним школьником 0,12 л/м (половина от взрослого) получим $\Delta t_{CO_2} = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^3/(25 \cdot 0,12)$ мин ≈ 40 мин.

Это уже ближе к житейским ощущениям и оправдывает присутствие вентиляции на потолке лифтов, необходимость проветривания комнат в домах, в школьных классах после каждого урока, а также наличие системы вентиляции в метро.

Таким образом, именно накопление углекислого газа в замкнутых помещениях в первую очередь действует угнетающе на человека. В чем это проявляется?

В литературе отмечается два типа воздействия: кратковременное (часы) и длительное (регулярно, более нескольких часов в день). Симптомы при *кратковременном* воздействии при уровне вдыхаемого углекислого газа выше 0,1% – это усталость, головная боль, ухудшение концентрации внимания, плохой сон... При *длительном* воздействии при уровне CO_2 выше 0,1% появляются проблемы с дыхательной системой (сухой кашель, риниты...), снижение иммунитета, ухудшение работы сердечно-сосудистой системы... При уровне выше 0,2% еще больше ухудшается концентрация внимания, растет количество совершаемых ошибок и т.д. по нарастающей. Возможно, требуется более жесткое ограничение на допустимый уровень CO_2 во вдыхаемом воздухе – порядка 0,06–0,08%. Это еще сильнее ограничит длительность нахождения в помещениях без вентиляции.

Еще одна проблема помещений без вентиляции – возможность расслоения воздуха на фракции. Поскольку углекислый газ в полтора раза тяжелее воздуха, он может опуститься ближе к полу и его концентрация там увеличится. Но процесс этот медленный, и любое движение воздуха перемешивает фракции.

Наконец, использование растений, казалось бы, должно помочь – ведь они выделяют кислород и поглощают углекислый газ. Однако, это происходит только днем, а вечером и ночью (когда свежий воздух особенно нужен) растения выделяют углекислый газ, усугубляя проблему с его накоплением.

Накопление угарного газа в замкнутом помещении. Казалось бы, откуда взяться угарному газу (CO) в замкнутом помещении, если нет рядом дровяной печки или камина с неидеальной вытяжкой? Но в литературе приводятся следующие данные: наряду с углекислым газом человек выдыхает также и угарный газ – в количестве примерно 1,6 мл/ч (при нормальных условиях); предельно допустимая для человека концентрация угарного газа составляет 1 мг/м^3.

Этих данных достаточно, чтобы снова провести оценки времени накопления предельной концентрации угарного газа для людей в лифте, комнате, вагоне метро и школьном классе. Для этого перейдем от объема к массе образовывающегося угарного газа, воспользовавшись известным соотношением: один моль любого газа при нормальных условиях занимает объем 22,4 л. Для CO молярная масса равна 28 г, поэтому 1 мл CO имеет массу 1,25 мг, а значит, 1,6 мл/ч выдыхаемого CO одним человеком соответствует появлению в воздухе 2 мг/ч угарного газа.

В таблице 2 приведены значения времени накопления CO_2 и CO до опасной концен-

(Продолжение см. на с. 34)

...если тело пришло в движение, уже этого достаточно, чтобы оно его продолжало с той же скоростью и в направлении той же прямой линии...

Рене Декарт

... в то время как наука продвигается в одном направлении путем развития наших физических представлений, она может продвигаться также и по пути изобретения новых математических методов.

Уильям Роуэн Гамильтон

Ценность идеи вектора несказанна.

Джеймс Клерк Максвелл

Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара.

Христиан Гюйгенс

Часто бывает удобно изобразить вектор в виде стрелки, указывающей направление действия. Но почему же можно представить силу стрелкой? ... магнитная сила имеет удивительное свойство: в любой данной точке пространства как направление, так и величина силы зависят от направления движения частицы...

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам векторы в физике?

Открытие векторного исчисления стало мощной «витаминной инъекцией» как для математики, так и для физики. Овладение новым компактным языком оказалось важным не только для «большой» науки – оно может и должно быть полезным инструментом при изучении еще школьного курса точных дисциплин. Обращение к векторам во многих случаях позволяет и нагляднее описать физические явления, и помочь при решении конкретных задач, перенеся вас на новый уровень их понимания (ведь латинское *vector* означает «несущий»).

Продолжая разговор о дружеском союзе математики и физики, попробуем сегодня оценить вклад векторов в нашу учебную практику в надежде отдать должное восхищенному отзыву Максвелла.

Вопросы и задачи

1. Под каким углом к берегу необходимо плыть на лодке, чтобы снос по течению был минимальным, если скорость лодки относительно воды $v_л$, а скорость реки: а) постоянна по всей ширине реки и равна $v_р$ ($v_р > v_л$); б) изменяется по линейному закону – равна нулю у берегов, на середине реки максимальна и равна v_0 ($v_0 > 2v_л$)?

2. Две лодки, скорости которых по модулю одинаковы и равны v, буксируют третью лодку с помощью двух нерастяжимых тросов так, что угол между тросами равен 2α. Каковы модуль и направление скорости буксируемой лодки?

3. Две гладкие спицы, продернутые через связывающее их колечко, движутся равномерно и поступательно со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Найдите построением скорость колечка.

4. Четыре жука находятся в вершинах квадрата $ABCD$ со стороной a и начинают одновременно двигаться со скоростями, по модулю равными v. Причем жук A все время держит курс на жука B, жук B – на C, C – на D, D – на A. Встретятся ли жуки, и если да, то через какое время?

5. Как расположатся концы векторов скоростей снаряда, выпущенного из орудия под углом α к горизонту, если эти векторы построить из одной точки? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Два камня находятся на одной вертикали на расстоянии L друг от друга. Верхний камень бросают вниз со скоростью v_0, а нижний одновременно отпускают без начальной скорости. Через какое время камни столкнутся, если они падают с достаточной высоты в отсутствие сопротивления воздуха?

7. Математический маятник совершает колебания. Как направлено ускорение его грузика в крайних, промежуточных и самой нижней точках?

8. К телу приложены силы 5Н и 3Н. Может ли их равнодействующая быть равной: 1Н; 3Н; 4Н; 9Н?

9. Можно ли силу 8Н разложить на две по 5Н каждая? А на две по 9Н каждая?

10. Брусок покоится на наклонной плоскости. Как графически найти точку приложения нормальной реакции опоры?

11. Закрытый вагон движется по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением a. К полу вагона привязан на нити шарик, заполненный гелием. Куда отклонится нить?

12. Тело брошено под углом к горизонту. Как меняется во время его движения мощность силы тяжести? Сопротивление воздуха не учитывать.

13. В результате сложения электрических полей с напряженностями E_1 и E_2 получено поле E. Равна ли энергия поля E сумме энергий полей E_1 и E_2?

14. Является ли стрелка компаса, указывающая направление магнитной индукции поля Земли, вектором?

15. Вблизи Москвы вертикальная компонента магнитной индукции поля Земли $B_{\text{в}}$ составляет примерно 93% от полной индукции B. Какой процент от полной индукции составляет горизонтальная компонента $B_{\text{г}}$?

16. Человек идет со скоростью v навстречу зеркалу, горизонтальная плоскость которого движется вверх со скоростью u. Какова скорость изображения человека в зеркале?

17. Как будет ориентироваться относительно Солнца спутник сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая покрыта черными термобатареями?

Микроопыт

Постарайтесь как можно сильнее ударить ногой по покоящемуся мячу (естественно, в большом спортзале или на стадионе). Как связана скорость бьющей ноги v со скоростью отлетевшего мяча u? Какие допущения вам придется сделать для этой оценки?

Любопытно, что…

…еще в конце XVI века голландский инженер и математик Симон Стевин осознал векторный характер силы и предложил способ изображения сил с помощью линий и правило геометрического их сложения.

…в начале XVII века Галилей, исследуя поведение тел, брошенных под углом к горизонту, выдвигает фундаментальный принцип – закон сложения перемещений.

…в изданном в 1644 году трактате Декарта «Начала философии» в формулировке принципа постоянства количества движения (импульса тела) ученый странным для него образом посчитал скорость не векторной, а скалярной величиной, что стало причиной ошибочности правил, образующих декартову теорию соударений.

…уже в 1669 году Гюйгенс уточнил, что при взаимодействии тел сохраняется не арифметическая, а геометрическая сумма количеств движения, и вывел законы столкновения упругих тел.

…в учебниках физики на английском языке различают два понятия: velocity – скорость (векторная величина) и speed – быстрота движения (скалярная величина). Второй термин образует корень слова «спидометр».

…разделить физические величины на скалярные и векторные предложил ирландский математик и механик У.Гамильтон, разработав особые правила действий с векторами. Новое исчисление оказалось удивительно подходящим для формулировки теории электромагнетизма Максвелла, а в дальнейшем было развито американским физиком Дж.Гиббсом и английским ученым О.Хевисайдом.

…теория скользящих векторов, применяемая в задачах, где приходится принимать в расчет не только массу, но и размеры тела, широко используется в статике, в строительной механике, в кинематике и динамике твердого тела.

…векторы, связанные с вращением, направление которых определяется знаменитым «правилом буравчика», – это момент силы, угловые скорость и ускорение. А еще один вектор – момент количества движения – «проник» из механики в теорию элементарных частиц, став одной из важнейших их характеристик, называемой *спином*.

Что читать в «Кванте» о векторах в физике

(публикации последних лет)

1. «Геометрия скользящих векторов» – 2014, Приложение №4, с.114;

2. «Поле и линии поля» – 2015, №2, с.35;

3. «Скорость и ускорение» – 2016, Приложение №4, с.6;

4. «Как не быть мазилой» – 2018, №7, с.37;

5. «Господин Великий Косинус» – 2019, №1, с.39;

6. «Относительность движения в задачах кинематики» – 2019, №2, с.43;

7. «Относительность движения в задачах динамики» – 2019, №4, с.40.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 29)

трации, а также времени развития кислородной недостаточности в лифте, комнате, вагоне метро и школьном классе. Для детей принята половинная величина выдыхаемого CO и CO_2.

Таблица 2. Сопоставление времени снижения концентрации O_2, накопления CO и CO_2

	Кол-во чел.	Объем, $м^3$	Время $\downarrow O_2$	Время $\uparrow$ CO	Время $\uparrow CO_2$
Лифт	1	1,9	8 часов	1 час	5 минут
Комната	2	30	3 суток	13 часов	36 минут
Вагон метро	100	240	10 часов	≈1 час	6 минут
Класс	25	200		8 часов	40 минут

Видно, что накопление углекислого газа примерно на порядок опаснее накопления угарного газа и еще на порядок опаснее снижения концентрации кислорода.

Мощность систем вентиляции. Как оценить мощность систем вентиляции $q_{\text{вент}}$, необходимую для поддержания нормального состава воздуха? Если отвлечься от переходных процессов установления и выравнивания потоков воздуха, то конечный результат выглядит очень просто:

$$q_{\text{вент}} = \frac{q_{CO_2}}{\left(C_{CO_2\,\max} - C_{CO_2}\right)}.$$

Так если $q_{CO_2} = 0,25$ литра в минуту (в этом случае человек выдыхает 15 литров CO_2 в час), то при $C_{CO_2\,\max} = 1 \cdot 10^{-3}$ и $C_{CO_2} = 4 \cdot 10^{-4}$ получим требуемую мощность вентиляции в 420 литров воздуха в минуту или 25 $м^3$ в час. Если же выдыхается 20 литров CO_2 в час, то мощность вентиляции увеличивается до 33 $м^3$ воздуха в час. А если принять для максимально допустимого значения концентрации CO_2 в воздухе несколько меньшее значение $0,8 \cdot 10^{-3}$, то мощность вырастет уже до 38 $м^3$ воздуха в час (при 15 л CO_2 в час) и 50 $м^3$ воздуха в час (при 20 л CO_2 в час).

Много это или мало? Как обеспечить такой приток свежего воздуха? Например, если приоткрыть дверь, то через каждый квадратный сантиметр щели при перепаде давлений по обе стороны двери $\Delta p = 10$ Па проходит в час один кубометр воздуха. Это означает, что при указанном Δp через сантиметровую щель в двери высотой два метра проходит 200 $м^3$ воздуха за час. Отметим, что принятый уровень перепада давлений 10 Па довольно мал (это 10^{-4} от атмосферного) и вполне может быть достигнут. Еще более мощный эффект вентиляции оказывает проветривание при открытии окон и дверей в течение хотя бы нескольких минут.

В качестве примера рассмотрим ситуацию с кислородом и углекислым газом при спасении детей в пещере Таиланда, частично затопленной водой. В 2018 году весь мир следил за спасением футбольной команды из 12 школьников и их тренера, ушедших на экскурсию в пещеру Кхао Луанг и застрявших в ней на 18 дней (23 июня – 10 июля) из-за дождей, затопивших вход в пещеру. Они укрылись в воздушном кармане, полностью перекрытом водой и удаленном от выхода из пещеры на 5 километров. Задача заключалась в высвобождении ослабевших детей и тренера из пещеры. Ситуация осложнялась наличием узкой щели – на рисунке 2 она обозначена как «опасная точка», через которую предстояло выбираться. Особенно-

Рис. 2. Характерный вид пещеры Кхао Луанг. Слева – школьники и тренер, запертые в воздушной полости, справа – спасатели

Рис. 3. Узкая щель («опасная точка»). Для проплыва через щель было необходимо снять акваланг, поэтому каждого ребенка спасали два дайвера

сти проплыва через щель показаны на рисунке 3. Спасателям пришлось непрерывно откачивать воду из пещеры. Поэтому в ней находилось большое количество спасателей, помогавших откачивать воду и готовить детей к выходу.

В этой ситуации оказались важны все отмеченные выше особенности поведения кислорода и углекислого газа в замкнутом объеме. Для борьбы с постепенным уменьшением количества кислорода в пещере была организована доставка кислорода с помощью специального трубопровода. Было решено, что накопление углекислого газа в пещере представляет существенно большую опасность, чем нехватка кислорода. Закачкой кислорода по трубопроводу в верхнюю часть пещеры вытесняли углекислый газ. Учитывалось также расслоение воздуха на фракции – CO_2 скапливался в нижней части пещеры. Вот почему дети и тренер скрылись в верхней ее части.

Поиски ребят и подготовительные работы заняли почти две недели. За это время известный изобретатель и организатор исследований Илон Маск (космические корабли, электрокары) успел из запчастей к ракете изготовить миниатюрную подводную лодку на одного человека и доставить ее в Таиланд. Но из-за узкой щели от ее использования отказались.

Ситуация с каждым днем становилась все более сложной. Необходимо было постоянное присутствие людей, занятых на откачке воды из пещеры (иначе пещера полностью заполнилась бы водой) и установке труб для подачи кислорода. Более десятка аквалангистов доставляли в пещеру воду, еду и кислородные баллоны. Там постоянно присутствовали врачи и те, кто готовили спасательную операцию. При дыхании этих взрослых спасателей состав воздуха ухудшался еще стремительнее. Наступил момент, когда из-за накопления углекислого газа дальше ждать было нельзя. Множество кислородных баллонов было расставлено по всему маршруту из пещеры к выходу (каждый баллон рассчитан на работу только в течение часа). Тысяча спасателей снаружи, включая сто дайверов, начали операцию. В первый день 13 дайверов спасли четырех подростков. Во второй день 18 дайверов (и 70 аквалангистов сопровождения) спасли еще четверых. Наконец, в третий день были спасены оставшиеся четверо детей и их тренер, а также 4 человека, остававшиеся в пещере. Молодцы!

Взгляд изнутри

На уровне клеток организма состав воздушной среды совершенно иной. Содержание кислорода в клетках организма около 1–2% (исключение – эритроциты, в которых может содержаться до 96–98% кислорода), углекислого газа в клетках около 6%. Если концентрации CO_2 в клетках уменьшается, то появляется все больше проблем с дыханием. На рисунке 4 приведена зависимость характерного времени, в течение которого человек (не рекордсмен) способен задержать дыхание, частоты пульса и степени

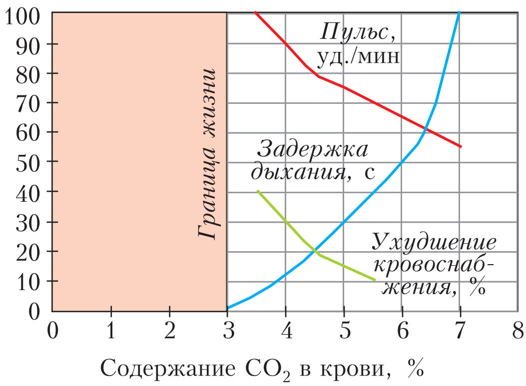


Рис. 4. Характерная зависимость времени задержки дыхания (секунды), частоты пульса (количество ударов в минуту) и степени ухудшения кровоснабжения (проценты) от концентрации углекислого газа в крови

ухудшения кровоснабжения органов от концентрации углекислого газа. Общий вывод таков: при уменьшении концентрации CO_2 время задержки дыхания уменьшается и, если она приближается к 3%, клетки гибнут; быстро растет частота пульса; ухудшается кровоснабжение органов. В результате желательная концентрация CO_2 в клетках должна быть 6% и даже немного больше. Примерное содержание кислорода и углекислого газа в различных частях организма человека, приведенное в таблице 3, подтверждает вышеуказанные цифры.

Таблица 3. Содержание кислорода и углекислого газа

	O_2	CO_2
Вдыхаемый воздух, %	21	0,04
Выдыхаемый воздух, %	16	4
Альвеолярный воздух, мм рт.ст	105-110 (14%)	40 (5 %)
Артериальная кровь, мм рт.ст.	100	40
Венозная кровь, мм рт.ст.	40	46
Клетки, мм рт.ст.	~10	60-70

В легких происходит обмен кислорода и углекислого газа между альвеолами и кровью. Альвеолы – концевые образования в легких, имеющие вид пузырьков, которые оплетены сетью капилляров (рис.5). Через стенки альвеол (их диаметр около 0,3 мм, количество альвеол в легких человека около миллиарда, а общая поверхность приблизительно 100 м^2) осуществляется газообмен: кислород переходит в кровь и примерно столько же углекислого газа из крови поступает в легкие. Более точно, в среднем за сутки из альвеолярного воздуха в кровь поступает 500 литров кислорода и выделяется 430 литров углекислого газа из крови в альвеолярный воздух.

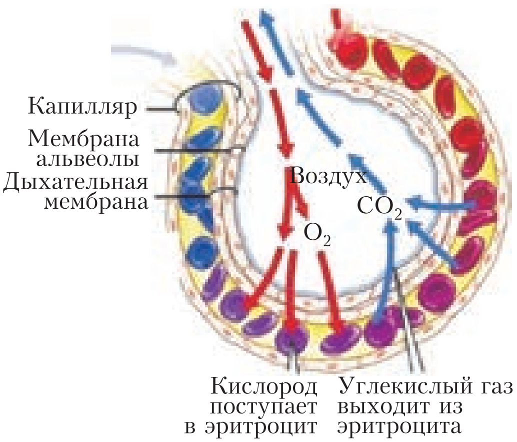


Рис. 5. Вид альвеолы, опутанной капиллярами. Показаны пути поступления кислорода в эритроциты и выхода углекислого газа из эритроцитов

Более подробно о свойствах альвеол рассказано в книге К.Ю.Богданова «Физик в гостях у биолога» (Библиотечка «Квант», выпуски 49, 133).

Что первично для организма: O_2 или CO_2?

Помните известный парадокс: что было раньше – курица или яйцо? Он не разрешим, если не привлекать во внимание процесс эволюции и образование новых видов. Но если привлечь, то у яйца оказывается некоторый приоритет, он древнее. Так, еще динозавры откладывали яйца, а птицы произошли от одной из ветвей динозавров. Получается, что яйцо древнее птицы и в этом, эволюционном, смысле первично...

В нашем случае проблема выбора – что первично (иными словами, что запускает процессы в человеческом организме): кислород или углекислый газ – решается следующим образом. Раньше первичным считался кислород – ведь он основной источник энергии, дающий толчок всем процессам в организме. Но сейчас маятник выбора качнулся в сторону углекислого газа. Постепенно пришли к выводу, что первичным, запускающим, механизмом является накопление в организме углекислого газа.

Накопление CO_2 в организме в ходе расщепления в клетках жиров и белков дает сигнал мозгу о том, что углекислый газ нужно выводить из клеток – он «садится» на эритроциты и перемещается к альвеолам легких. На освободившиеся места в «поезде» эритроцитов «усаживается» O_2 и разносится по организму. Поэтому современный взгляд на процесс дыхания таков: *сначала выдыхается углекислый газ, а потом вдыхается кислород.* При этом вместе с углекислым газом выдыхаются и излишки кислорода.

Для дыхания необходимы оба газа, попеременно «седлающие» эритроциты. При этом венозная кровь окрашена с помощью углекислого газа в темно-красный цвет, а артериальная кровь с помощью кислорода – в ярко-красный.

Среднее соотношение между количеством углекислого газа и кислорода в организме здорового человека примерно 3:1 (6% CO_2 и 2% O_2).

Взаимодействие «снаружи» и «изнутри». Итак, углекислый газ необходим для жизнедеятельности человека. Важно и поддержание определенного уровня CO_2 в организме. А его недостаток и избыток вредны. Слишком высокое накопление CO_2 возможно в плохо проветриваемых помещениях: при большом проценте (более 0,08–0,1%) его уровень в организме также растет (последствия этой ситуации обсуждались выше). Нехватка углекислого газа в крови (менее 4%) тоже опасна (см. рис.4).

В каких случаях может возникнуть такая нехватка? Типичный пример – учащенное дыхание: слишком много CO_2 выдыхается и мало остается в организме. При недостатке углекислого газа кислород прочно «прикреплен» к эритроцитам. И даже когда кислорода в крови много, он оказывается связанным и плохо поступает в ткани организма. Если в такой ситуации дышать еще чаще, то это только усугубит ситуацию.

Что делать? Движение, гимнастика, спорт на воздухе или в хорошо проветриваемом помещении – все это увеличивает содержание CO_2. Капилляры расширяются и даже образуются новые сети капилляров, кровоток усиливается, кислород лучше отделяется от гемоглобина и поступает в клетки…

Приведем еще один пример важности более редкого дыхания. Стайерам во время бега рекомендуют в случае, когда уже не хватает сил, как можно дольше задержать дыхание для того, чтобы открылось «второе дыхание» и он мог бежать дальше.

Оказание первой помощи. Дыхание «рот в рот». При оказании первой доврачебной помощи человеку в случае исчезновения дыхания одним из действенных методов является искусственное дыхание методом «рот в рот» вместе с непрямым массажем сердца.

В рот пострадавшего через марлю или носовой платок спасатель должен выдыхать воздух с частотой 12–15 раз в минуту. Казалось бы, это бессмысленно. Ведь в начале статьи мы много раз повторяли, каков должен быть состав вдыхаемого воздуха (21% кислорода и 0,4% углекислого газа). А тут выходит, что пострадавший вынужден принудительно получать воздух «на выдохе» (16% O_2 и 4% CO_2). Тем не менее, оказывается, что и в выдыхаемом воздухе еще есть остатки кислорода в концентрации, превышающей минимально допустимую (16% > > 13–14%). А большая концентрация CO_2 оказывается полезной для стимуляции центра головного мозга, который вызывает дыхательный рефлекс, приводящий к раскрытию альвеол.

В этой ситуации имеется некоторая аналогия с поведением спасателя при остановке сердца: он должен повернуть пострадавшего на спину и нанести ему удар ребром руки по грудной клетке. Цель – сотрясение грудной клетки, что должно привести к запуску остановившегося сердца.

Так что роль CO_2 при остановке дыхания несколько иная, чем при обычном, спокойном дыхании.

Способы увеличения концентрации выдыхаемого углекислого газа. Человек в повседневной жизни «в автоматическом режиме» делает примерно 15 циклов вдох-выдох в минуту (каждый цикл имеет длительность приблизительно 4 секунды). Обычное отношение длительности вдоха и выдоха 1 : 1,3.

Смысл основных дыхательных гимнастик заключается в повышении содержания в крови углекислого газа за счет задержки, ослабления, замедления или искусственного затруднения дыхания. При этом повышение концентрации CO_2 (до определенного предела, около 8%) улучшает усвоение кислорода организмом человека. В разных методиках это достигается или за счет задержки дыхания после вдоха либо после выдоха, или за счет удлиненного выдоха, или за счет удлиненного вдоха, или их комбинаций. Иными словами, нужно, чтобы фаза выдоха существенно превышала вдох.

Наиболее последовательной из современных методик является система Бутейко – поверхностное дыхание с задержкой. Она направлена на уменьшение потребления кислорода и насыщение организма углекислым газом. По этой системе усилием воли вдох занимает 2 секунды, выдох – 4 секунды, за которым следует 4-х секундная задержка дыхания. Всего цикл длится 10 секунд, укладываясь в 6 циклов в минуту.

В практике йоги правильным считается весьма продолжительный выдох с отношением длительности вдоха и выдоха 1 : 5. Утверждается, что йог в состоянии глубокой медитации может «обходиться» всего двумя-тремя циклами вдох-выдох в минуту. Первая реакция на это – не может быть! Но далее неожиданно выясняется, что очень редкое дыхание йогов может быть связано с повышенной ролью у них кожного дыхания.

И действительно, в этом что-то есть. Площадь кожи человека, покрытая 5 миллионами волосков, составляет 1,5–2 $м^2$. А суммарная площадь 600 миллионов альвеол в легких – около 100 $м^2$. Грубо получается, что на уровне 1–2% кожа может выполнять дыхательную функцию. Измерения показали, что через кожу выделяется около 2% углекислого газа и поглощается примерно 1% кислорода. Более того, через кожу выводится из организма порядка 800 граммов водяных паров – даже больше, чем из легких!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Об укладке блинов, котлет и апельсинов

С.ДОРИЧЕНКО

Сегодня Квантик решил серьезно попрактиковаться в готовке. Сам он обычную пищу не ел, но друзей любил порадовать чем-нибудь вкусненьким.

– Начнем с блинов, – решил Квантик. С тестом проблем не возникло, но один блин так причудливо растекся по сковороде, что явно налез бы на другие после переворачивания (рис.1).

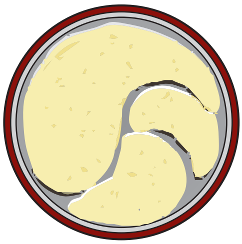


Рис. 1

– Интересно, а поместятся ли блины, если я переверну их все?

Квантик любил сначала все продумать, а потом уже делать. Зачем пытаться укладывать перевернутые блины, если они, может, и не влезут? Сначала надо доказать теорему! Но запах подгорающего теста заставил Квантика действовать: он схватил такую же, но холодную сковороду и ловко опрокинул туда все блины, чтобы пока спокойно подумать. Чуть прилипшие блины перевернулись в воздухе целиком вместе с горячей сковородой, но тут же отлипли и аккуратно упали на холодную – румяной стороной кверху.

– Кажется, это было доказательство, – осенило Квантика. – Интересно, а если бы моя сковорода была треугольной? Для равностороннего треугольника все бы сработало, а вот для любого… пожалуй, не всегда. (А вы поняли, почему?)

Следующий блин Квантик сделал «математическим», в виде прямоугольника. Переворачивая его на другую сторону, Квантик немного не рассчитал, и прямоугольник завернулся, да так, что даже вылез за пределы сковороды (рис.2).

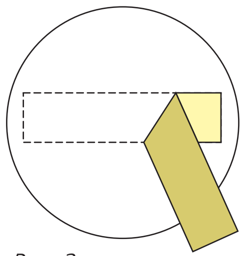


Рис. 2

– Надо его хотя бы сдвинуть целиком на сковороду. Ой, а вдруг не влезет?

Времени на доказательство не было, и мысли в голове Квантика сменялись с бешеной скоростью.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200406

– И зачем мне понадобился блин именно в форме прямоугольника? А для другой формы понятнее, что ли, поместится ли загнутый блин? Может, это вообще от формы блина не зависит… Ну если не зависит, то любой, даже самый большой блин должен поместиться, если его загнуть. Стоп, самый большой блин – это же… вся сковорода! Но для нее ответ очевиден!

Квантик так удивился этой неожиданной мысли, что резко вдвинул блин на сковороду и погасил огонь.

– Ну конечно. Если загнуть по прямой блин размером со сковороду, меньшая часть целиком окажется внутри (под или над) большей, и загнутый блин точно влезет на сковороду! А если взять блин поменьше, он влезет после загиба и подавно (рис.3).

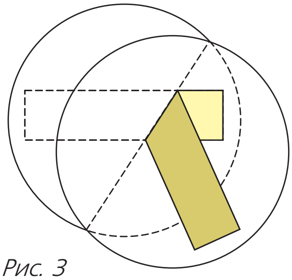


Рис. 3

Квантик решил, что хватит с него на сегодня блинов. Лучше сделать что-нибудь простое и понятное – вот, например, котлеты. Причем круглые и абсолютно одинакового размера. Приготовив фарш, Квантик быстро налепил котлет и стал как попало выкладывать их на разогретую сковороду. После шестой котлеты он обнаружил на столе оставшуюся седьмую, места для которой с виду уже не было. Квантик быстро сдвинул котлеты вплотную друг к другу и втиснул седьмую на край – получилось «тютелька в тютельку» (рис.4).

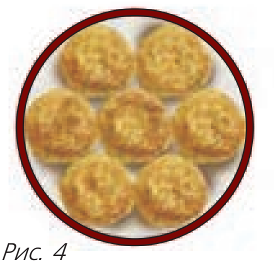


Рис. 4

– Повезло? Или если шесть влезло, то и семь влезет? – задумался Квантик. Пока котлеты жарились с одной стороны, он аккуратно сформулировал гипотезу.

Котлетная теорема. *Пусть на круглой сковороде удалось поместить шесть одинаковых круглых котлет. Тогда на эту сковороду поместится и добавочная седьмая такая же котлета (возможно, для этого придется передвинуть предыдущие).*

– Вроде бы ясно, что расположение в виде «ромашки», когда одна котлета в центре, а остальные вокруг, самое выгодное. Но как это доказать? Если одна котлета лежит точно по центру и есть место еще хоть для одной, то остальные шесть влезут – просто подряд по кругу. А если никакая котлета не лежит строго по центру? Никаких идей…

Квантик перевернул котлеты, думая дальше.

– Зайдем с другой стороны: какая сковорода нужна для семи котлет? Радиус котлеты, скажем, 1. Тогда для «котлетной ромашки» хватит сковороды с радиусом 3. Идея! Докажем, что если шесть котлет поместилось, то радиус сковороды не меньше 3.

Квантик убавил газ и накрыл котлеты крышкой.

– И что дальше? Надо как-то использовать, что котлеты не накладываются друг на друга. Ага, это значит, что расстояние между любыми двумя центрами котлет не меньше 2. А еще котлеты не вылезают за пределы сковороды – т.е. расстояние от ее края до центра любой котлеты не меньше 1. Иными словами, центры котлет лежат в круге радиуса на 1 меньше, чем у сковороды. Переформулируем-ка задачу:

Точки в круге. *В круге лежат шесть точек, расстояния между любыми двумя из них не меньше 2. Тогда и радиус круга не меньше 2.*

– Попробовать от противного? – подумал Квантик. – Пусть радиус круга меньше 2. Случай, когда какая-то точка в центре круга, разобран. А если все точки не в центре, а где-то вокруг? Соединю-ка их с центром.

Квантик погасил огонь, взял бумажку и карандаши и провел из центра круга шесть зеленых отрезков. Потом подумал немного и соединил «соседние» точки красными отрезками (рис.5). Получилось шесть треугольников.

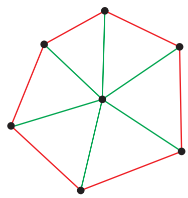


Рис. 5

– Все зеленые отрезки короче 2. А все красные – не меньше 2. Тогда в каждом из шести треугольников красная сторона – самая длинная. А это значит…

Квантик чувствовал, что решение где-то совсем рядом. И тут он вспомнил, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

– ...это значит, что в каждом треугольнике угол против красной стороны строго самый больший. Тогда он по величине больше трети от суммы углов – от $180°$ – т.е. больше $60°$. Стоп-стоп-стоп! А если я просто пройду по кругу – от одного зеленого отрезка к следующему и т.д. и вернусь в начало? Каждый зеленый угол точно будет больше $60°$. Углов шесть, и тогда их сумма больше $360°$ – больше полного оборота! Противоречие!!!

Квантик, решив задачу, никогда не мог сразу остановиться. Вот и сейчас он еще какое-то время размышлял над последним шагом решения.

– А если бы радиус круга равнялся 2? Тогда красная сторона в каждом треугольнике снова самая длинная, но уже не строго – она может и равняться зеленым. Значит, угол против нее не меньше $60°$.

А раз сумма шести углов между зелеными отрезками равна $360°$, все они по $60°$. Выходит, точки лежат на границе круга в вершинах правильного шестиугольника!

Квантик сформулировал доказанный факт:

Вторая котлетная теорема. *Если на сковороде радиуса 3 лежат шесть котлет радиуса 1, возможны два случая. Первый: одна котлета лежит точно по центру, а остальные – по краям, касаясь центральной. Второй: шесть котлет лежат «ромашкой» с пустым центральным местом.*

После всех этих котлетных теорем надо было передохнуть, и Квантик решил потренироваться в украшении стола. Он поставил на стол блюдо для фруктов – разумеется, математическое, в форме равностороннего треугольника – и стал выкладывать на него апельсины: тоже математические, т.е. абсолютно круглые и одинаковые. Апельсинов было девять, и на блюде осталось место еще ровно для одного, которого, увы, не было (рис.6).

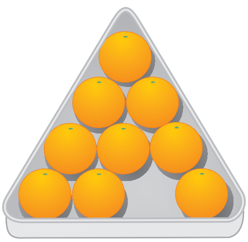


Рис. 6

– Некрасиво, – подумал Квантик. – Переложу-ка по-другому, чтобы нехватка не бросалась в глаза.

Квантик долго укладывал апельсины в один слой, и так и эдак, и наконец пришел к тому, что верна

Апельсинная теорема. *Если блюдо в виде равностороннего треугольника рассчитано ровно на десять апельсинов (в один слой, вплотную друг к другу и краям), то, как туда ни клади девять апельсинов (в один слой), обязательно останется место и для десятого, даже если не сдвигать остальные.*

– Вот тебе и отдых, – вздохнул Квантик. – Как подступиться к доказательству – совершенно неясно. Когда на блюде десять апельсинов, они – вернее, их центры – образуют красивую треугольную решетку. Но почему и девять никак по-другому не положишь – только в виде решетки с одним пропуском? Нарисую-ка эту решетку. Радиус апельсина возьму за 1.

Квантик изобразил апельсины кругами на плоскости – задача ведь фактически сводилась к этому плоскому варианту. У него получился большой треугольник, разделенный на меньшие, а блюдо и апельсины Квантик нарисовал пунктиром (рис.7).

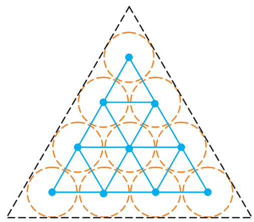


Рис. 7

– Центры апельсинов отстоят от края блюда хотя бы на 1 и поэтому лежат в пределах треугольной решетки. Стороны маленьких треугольников равны 2. Тогда для центров такая задача получается:

Точки в треугольнике. *Треугольник со стороной 6 разбит на маленькие треугольники со стороной 2 (см. рис. 7). В нем лежат девять точек, расстояния между любыми двумя точками не меньше 2. Докажите, что все точки лежат в вершинах маленьких треугольников (в узлах решетки).*

– Что-то тут напоминает котлетную теорему... Ага, если откинуть три угла, остается шестиугольник – та же «ромашка»! Нарисуюка его красным цветом (рис.8).

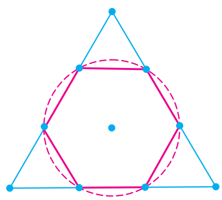


Рис. 8

Можно даже вокруг него невидимый круг описать радиуса 2. Но дальше-то что? У нас же теперь девять точек, а не шесть. Стоп! А что если шесть точек из девяти попадают в красный шестиугольник?

Вторая котлетная теорема! Ведь шесть точек лежат тогда в невидимом круге, а значит, либо одна точка в центре и пять – на краю круга, либо все шесть точек на краю. Но край круга пересекается с шестиугольником только в его вершинах! Значит, если шесть точек внутри шестиугольника – они все в узлах решетки.

Квантик перевел дух и продолжил разбираться.

– А сколько точек может быть снаружи шестиугольника, т.е. в трех «угловых» треугольниках? Ага, в каждом максимум по три, значит, всего трижды три – девять? Нет, я неправильно считаю. Ведь если точка на красной стороне углового треугольника, то она и в шестиугольнике тоже. А мне надо понять, сколько точек могут быть строго вне шестиугольника. В каждом угловом треугольнике такая точка... одна! Значит, вне шестиугольника – максимум три точки, а в шестиугольнике – минимум шесть. Ура!!! Ведь тогда эти шесть (или больше) точек лежат в узлах решетки. И в каждый угловой треугольник попадет хоть одна из них, поэтому и в угловых треугольниках точкам некуда деваться кроме узлов. Все доказано!

Квантик захотел узнать, не встречались ли раньше подобные задачи. Полазив по интернету, он выяснил, что некоторые из них печатались в «Кванте» и что автор задачи про блины – А.Абрамов, про загнутый прямоугольник – В.Произволов, про апельсины – Н.Долбилин, который, кстати, предлагал подумать над общим случаем – когда в блюде помещается не 10, а 15 апельсинов, 21 и т.д. (в виде треугольной решетки, но с бóльшим количеством точек). Задача про котлеты оказалась глубоким фольклором – наверняка каждый математик, занимавшийся проблемой упаковки кругов в круге, ее знал (а «официальное» доказательство опубликовал в 1968 году Рональд Грэхем).

А еще Квантик нашел задачу М.Евдокимова из Турнира городов, которая очень ему понравилась:

Апельсины в кубе. *В кубическую коробку поместили три одинаковых апельсина. Докажите, что в такую же пустую коробку можно поместить четыре таких же апельсина.*

– Буду рассуждать по аналогии с предыдущими задачами, – решил Квантик. – Апельсины – это шары. Приму радиус шара за 1. Центры шаров отстоят от граней коробки хотя бы на 1, т.е. лежат в кубе со стороной на 2 меньше, чем у коробки. Друг от друга центры отстоят хотя бы на 2, значит, образуют треугольник, все стороны которого не меньше 2. Интересно, а в куб какого наименьшего размера можно поместить равносторонний треугольник со стороной 2?

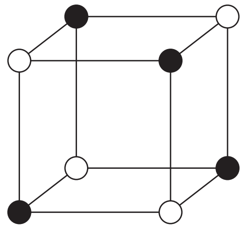


Рис. 9

Правдоподобный пример пришел в голову быстро: Квантик взял куб, у граней которого диагонали равны 2. Если раскрасить вершины такого куба в шахматном порядке, как на рисунке 9, любые три черные точки дадут как раз равносторонний треугольник со стороной 2, а все четыре черные точки – тетраэдр, все ребра которого равны 2.

Так что если поместить центры четырех шаров единичного радиуса в черные точки, шары не будут мешать друг другу. Сторона такого куба равна $\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора), а сами шары уместятся в кубическую коробку со стороной $\sqrt{2}+2$ (два шара будут лежать на дне коробки «по диагонали», а сверху на них – еще два шара «по другой диагонали», как на рисунке 10).

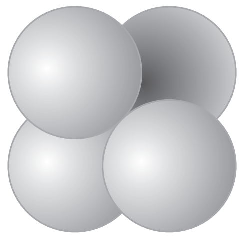


Рис. 10

– Наверняка это и есть ответ, – подумал Квантик. – Осталось доказать теорему:

Треугольник в кубе. *В кубе лежит треугольник, каждая сторона которого не меньше 2. Тогда сторона куба не меньше $\sqrt{2}$.*

С этой теоремой Квантик мучился несколько часов. Решение вышло хитрое.

– Треугольник «широкий», он требует много места, – размышлял Квантик. – Одну его сторону я еще мог бы вместить в меньший куб – например, пустить ее вдоль главной диагонали куба. Но третья вершина уже вылезет наружу. Получается, как треугольник ни крути, он «длиннее» куба... Что это значит? «Длиннее» куба в каком-то направлении? «Длиннее» какого-то его ребра? Стоп, эту мысль надо обдумать.

Спустя какое-то время Квантику удалось перейти от туманных догадок к строгому рассуждению. На радостях он его даже записал. Вот оно:

«Пусть наш треугольник (обозначим его ABC) поместился в куб со стороной меньше $\sqrt{2}$. Рассмотрим три ребра куба, выходящие из одной вершины, и спроецируем треугольник ABC на эти ребра.

А именно, сначала возьмем одну сторону – скажем, AB – нашего треугольника и рассмотрим ее проекции на выбранные ребра. Проекция на одно ребро получается, если зажать AB между двумя плоскостями, перпендикулярными ребру: они и высекут на ребре проекцию. Проецируя на три ребра, мы проведем три пары параллельных плоскостей и фактически заключим AB в прямоугольный параллелепипед: его стороны x, y, z равны длинам проекций, а его главная диагональ – это AB (рис.11).

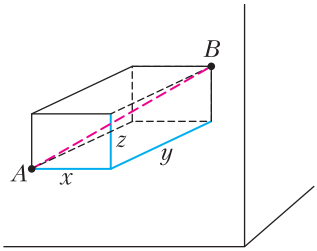


Рис. 11

По трехмерной теореме Пифагора, $x^2 + y^2 + z^2 = AB^2 \geq 4$ (ведь $AB \geq 2$). Проделав то же самое для BC и для AC, получаем: сумма квадратов проекций всех трех сторон треугольника не меньше 12.

Но эту же сумму можно подсчитать и «в другом порядке»: сначала спроецировать треугольник отдельно на каждое из трех ребер, а уже потом складывать. Проекция трех сторон треугольника на конкретное ребро будет состоять из трех отрезков, один из которых равен сумме двух других, $a = b + c$, как видно из рисунка 12: «крайние вершины» проецируются в концы отрезка длиной a, а «средняя» вершина – в точку, делящую его на части с длинами b и c.

При этом a не больше, чем длина ребра куба (так как треугольник лежит внутри куба), т.е. $a < \sqrt{2}$, откуда $a^2 + b^2 + c^2 \leq$ $\leq a^2 + (b + c)^2 = 2a^2 < 2 \cdot 2 = 4$. Значит, сумма квадратов проекций сторон на все три

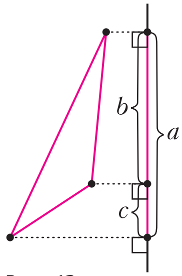


Рис. 12

ребра меньше 12 – противоречие! Задача про апельсины решена».

А напоследок Квантик решил напомнить читателям еще несколько «кулинарных» задач со страниц «Кванта» и «Квантика».

Задачи

1. Печенья на противне. На прямоугольный противень помещается 100 круглых печений. Обязательно ли на такой же противень можно уложить 400 круглых печений в два раза меньшего радиуса?

2. Торт с глазурью. Квадратный торт облит сверху и по бокам глазурью. Разрежьте его на пять цельных кусков, в которых поровну и торта, и глазури.

3. Лишний апельсин (С.Посицельский, М.Семенова). В плоской коробке в один слой вплотную лежат одинаковые круглые апельсины –

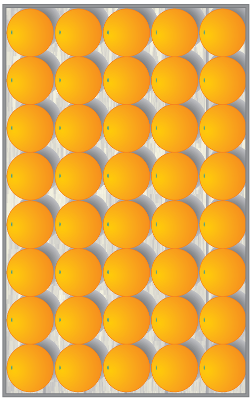


Рис. 13

восемь рядов по пять штук в каждом (рис.13). Удастся ли поместить в коробку еще один такой апельсин?

XLI Турнир городов

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8—9 классы

1. (4)[1] Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (т.е. клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

М.Евдокимов

2. (4) Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

Е.Бакаев

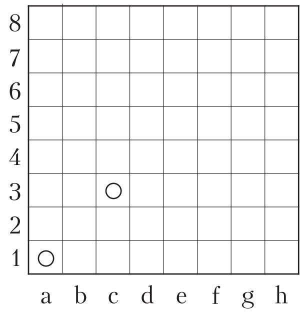
3. (4) На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B – точка пересечения высот треугольника DPQ.

Е.Бакаев

4. (5). Целое число n таково, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ имеет решение в целых числах x, y, z. Докажите, что тогда и уравнение $x^2 + y^2 - xy = n$ имеет решение в целых числах x, y.

А.Юран

5. (5) На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки (см. рисунок). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает ее либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8.



Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.

В.Ковальджи

10—11 классы

1. (4) Можно ли в каждую клетку таблицы 40×41 записать по целому числу так, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству тех соседних с ней по стороне клеток, в которых написано такое же число?

А.Грибалко

2. (4) Обсуждая в классе зимние каникулы, Саша сказал: «Теперь, после того как я слетал в Аддис-Абебу, я встречал Новый год во всех возможных полусферах Земли, кроме одной!» В каком минимальном количестве мест встречал Новый год Саша? Места, где Саша встречал Новый год, считайте точками на сфере. Точки на границе полусферы считаются не принадлежащими этой полусфере.

И.Думанский, Р.Крутовский

3. (5) По кругу стоят буквы A и B, всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква?

М.Дидин

4. Существует ли непостоянный многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, который можно представить в виде суммы $a(x) + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – квадраты многочленов с действительными коэффициентами,

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты (баллы за разные пункты одной задачи суммируются).

а) (2) ровно одним способом;
б) (3) ровно двумя способами?
Способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

С.Маркелов

5. (5) Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Произвольная прямая l, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B. Прямые, касающиеся окружностей в точках A и B, пересекаются в точке C, а биссектриса угла CPQ пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что все точки D, которые можно так получить, выбирая по-разному прямую l, лежат на одной и той же окружности.

А.Заславский

Сложный вариант

8–9 классы

1. (4) Существует ли число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?

М.Евдокимов

2. (5) Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич – треть всех голов и еще две, Алеша Попович – четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею? (Напомним, что $41! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 41$.)

А.Заславский

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если
а) (4) $N = 19$; б) (3) $N = 20$?

М.Малкин

4. (8) Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N \times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

М.Дидин

5. (9) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Ее основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

А.Юран

6. (9) У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из нее половину карт, какие хочет, и отдает Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

М.Евдокимов

7. (12) См. задачу М2601 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (4) На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U – множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U?

А.Толпыго

2. (5) Алеша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x,y)$, $b = \text{НОК}(x,z)$, $c = \text{НОК}(y,z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алеша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c.

Б.Френкин

3. (8) См. задачу М2598 «Задачника «Кванта».

4. (9) См. задачу М2599 «Задачника «Кванта».

5. (9) См. задачу М2600 «Задачника «Кванта».

6. (10) На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.

А.Грибалко

7. (12) Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в черный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k черных клеток, либо вовсе не было черных клеток?

А.Динев, К.Гаров, Н.Белухов

Устный тур для 11 класса

1. В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?

А.Грибалко

2. На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

Е.Бакаев

3. На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдется клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?

М.Евдокимов

4. См. задачу М2603 «Задачника «Кванта» в следующем номере журнала.

5. На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого – дуги трех различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.

А.Заславский

6. Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идет по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовем расстановку кубиков *хорошей*, если цвет оставшегося в самом конце кубика не зависит от того, с какого места стартовал робот. Назовем N *удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.

И.Богданов

Материал подготовили Е.Бакаев, И.Богданов, С.Дориченко, М.Евдокимов, А.Заславский, П.Кожевников, М.Малкин, Л.Медников, В.Ретинский, Е.Рябов, А.Семенов, Б.Френкин, И.Фролов, А.Юран

LXXXIII Московская математическая олимпиада

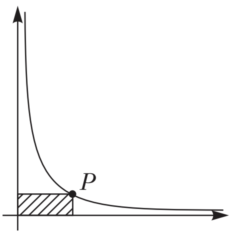
1 марта 2020 года прошла очередная Московская математическая олимпиада (одновременно со сложным туром Турнира городов, многие задачи были общими). Приводим некоторые задачи олимпиады (в скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась). Все условия и решения см. на сайте olympiads.mccme.ru/mmo/

Избранные задачи

1. (8) Том написал на заборе из досок слово ММО, а Гек – число 2020. Ширина каждой буквы и цифры 9 см, а ширина доски забора 5 см. Мог ли Гек испачкать меньше досок, чем Том? (Доски расположены вертикально, а слова и числа пишутся горизонтально. Цифры и буквы пишутся через равные промежутки.)

Д.Мухин, А.Федулкин, И.Эльман

2. (8) На графике функции $y = 1/x$ Миша отмечал подряд все точки с абсциссами 1, 2, 3, …, пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых – это отмеченная точка, еще одна – начало координат, а еще две лежат на осях (на рисунке показано, какой прямоугольник Маша закрасила бы для отмеченной точки P). Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз. Сколько получилось?



Д.Мухин

3. (8) Дано натуральное число N. Вера делает с ним следующие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее она делает эти же операции с новым числом и так далее. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1?

А.Шаламова

4. (8) В турнире по гандболу участвуют 20 команд. После того как каждая команда сыграла с каждой по разу, оказалось, что количество очков у всех команд разное. После того как каждая команда сыграла с каждой по второму разу, количество очков у всех команд стало одинаковым. В гандболе за победу команда получает 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Верно ли, что найдутся две команды, по разу выигравшие друг у друга?

Б.Френкин, А.Заславский

5. (8) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону CD, проходит через середину диагонали BD, а перпендикуляр, опущенный из точки D на сторону AB, проходит через середину диагонали AC. Докажите, что трапеция равнобокая.

А.Доледенок

6. (9) Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?

В.Новиков

7. (9) В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

А.Соколов

8. (10) Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, что при любом x справедливо равенство $P(x)+P(x+1)+\ldots$ $\ldots+P(x+10)=x^2$.

М.Евдокимов

9. (10) Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее 3/7 фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

Фольклор

10. (10) Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y. Прямая AO пересекает прямую BC в точке D, M – середина BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от A. Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY.

А.Соколов

11. (11) Существует ли такая непериодическая функция f, определенная на всей числовой прямой, что при любом x выполнено равенство $f(x+1)=f(x+1)f(x)+1$?

Фольклор

12. (11) Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

А.Кубарев

13. (11) Решите уравнение $\operatorname{tg}\pi x=$ $=\left[\lg\pi^x\right]-\left[\lg\left[\pi^x\right]\right]$, где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

А.Бегунц

14. (11) За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 черных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 черных колпачков. Каждый гном берет себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка, и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернется стол)?

М.Лобанов

15. (11). На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

М.Евдокимов

16. (11) Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b. Известно, что a и b – положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, он прыгает вправо на расстояние, равное a. Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b, то он прыгает влево на расстояние, равное b. Докажите, что независимо от начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии меньше 10^{-6}.

П.Бородин

Материал подготовил С.Дориченко

Московская олимпиада школьников по физике 2020 года

Второй тур

7 класс

1. Про зайчика (8 баллов)

Геша измерял плотность маленького стеклянного зайчика. Он налил воду в мензурку с ценой деления 2 мл, при этом столб воды доходил до отметки 170 мл. После того как Геша полностью погрузил зайчика на ниточке в воду, уровень воды поднялся до 180 мл. Далее Геша решил взвесить зайчика на школьных рычажных весах для лабораторных работ. Но гири у него были только массой 2 г. Получилось, что 12 гирь мало, чтобы уравновесить зайчика, а 13 – много. Не думая долго, Геша вычислил плотность зайчика:

$$\rho = \frac{25\ \text{г}}{180\ \text{мл} - 170\ \text{мл}} = 2500\ \text{кг/м}^3.$$

Пришел Лёлик, назвал Гешу неумным человеком и сказал, что на самом деле значение плотности зайчика может сильно отличаться от значения, вычисленного Гешей. Известно, что Лёлик оценивает погрешность измерения объема мензуркой в половину цены деления. Чему может быть равна плотность зайчика?

П.Крюков

2. Переходы (10 баллов)

Дядя Вова живет в области, а работает в Москве, до которой едет на электричке. Путь от железнодорожной платформы до места работы составляет 400 метров. На этом пути дядя Вова преодолевает два пешеходных перехода длиной по 20 метров, которые разделяет сорокаметровая маленькая площадь (рис.1). Светофор на каждом переходе

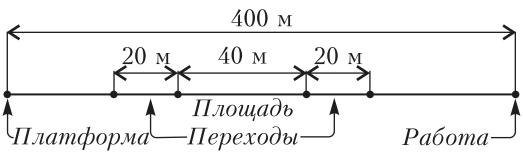


Рис. 1

включает зеленый сигнал на 25 секунд, а красный – на две минуты. Дядя Вова ходит не спеша, со скоростью не более 1 м/с. Обозначим t_1 – минимальное время, за которое дядя Вова может дойти от вокзала до работы, а t_2 – минимальное время на обратную дорогу. Интервал времени между включением зеленого сигнала на первом светофоре на пути от вокзала и включением зеленого сигнала на втором обозначим T. Дядя Вова соблюдает правила, поэтому он выходит на «зебру» перехода только в том случае, если до окончания зеленого сигнала светофора остается 20 секунд и более. В противном случае он дорогу не переходит.

1) Пусть время T равно 60 с. Найдите время t_1 и t_2.

2) Чему равно время T, если $t_1 = t_2$?

П.Крюков

3. Фонтан Герона (10 баллов)

На рисунке 2 изображена схема «Фонтана Герона». Три сосуда с вертикальными стенками, площади оснований которых указаны на рисунке, где $S = 100$ см^2, соединены системой трубок с площадью сечения $S_1 = 10$ мм^2. Суммарный объем воздуха в нижних сосудах остается при работе фонтана постоянным. Вся вода, выходящая из верхней трубки и образующая фонтан, в итоге оказывается в верхнем сосуде. Квадрат скорости воды v на выходе из трубки определяется выражением $v^2 = \alpha(h_2 - h_1)$, где α – неизвестный коэффициент пропорциональности, расстояния h_1 и h_2 показаны на рисунке. В процессе работы фонтана расстояния h_1, h_2 и h_3 меняются.

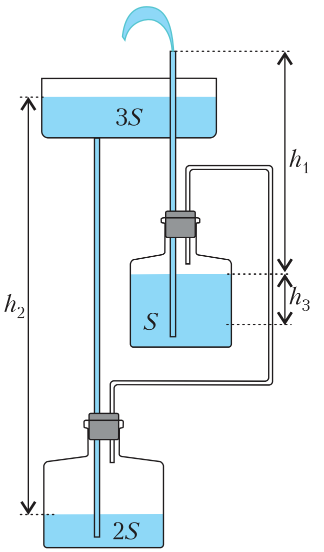


Рис. 2

1) Как изменяется уровень воды в верхнем сосуде в процессе работы фонтана?

В некоторый момент времени $h_1 = 35$ см, $h_2 = 60$ см, а скорость воды, бьющей из трубочки, равна $v = 2{,}0$ м/с.

2) Найдите скорости изменения уровней воды в нижних сосудах в этот момент времени.

3) По истечении некоторого времени уровень воды в среднем сосуде опустится на $h_3 = 6$ см, при этом нижний сосуд еще не заполнится. Чему равна в этот момент скорость воды на выходе из трубки?

А.Бычков

4. Мокрый песок (12 баллов)

Строительный песок часто добывается со дна рек или карьеров. Такой песок содержит воду, что количественно характеризуется влажностью песка $\varphi = \frac{m_{\text{вод}}}{m_{\text{п}}}$, где $m_{\text{вод}}$ – масса воды (в мокром песке), $m_{\text{п}}$ – масса песка без воды. Объем влажного песка $V_{\text{вл}}$ сильно зависит от его влажности. Обозначим $\alpha = \frac{V_{\text{вл}} - V_{\text{сух}}}{V_{\text{сух}}}$ – относительное изменение объема песка при его увлажнении. Приближенный график зависимости $\alpha(\varphi)$ приведен на рисунке 3. Значения влажности песка и относительного изменения объема выражены в процентах.

1) Определите значение влажности, при котором плотность влажного песка равна плотности сухого.

2) Объем порции влажного песка складывается из объемов песчинок, воды и воздушных полостей: $V_{\text{вл}} = V_{\text{п}} + V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}$. Когда небольшое количество воды попадает в песок, вода обволакивает песчинки за счет

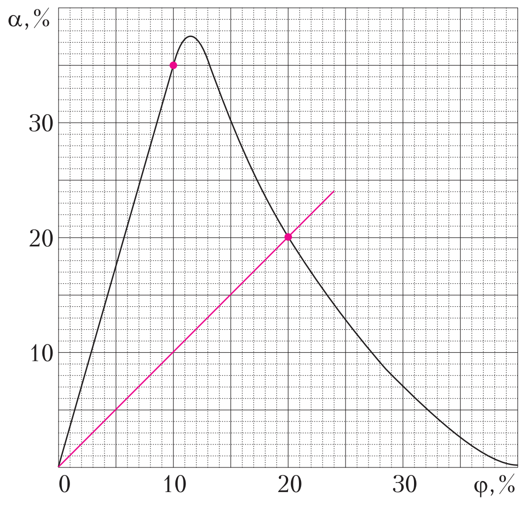


Рис. 3

капиллярных сил и отдаляет их друг от друга. Предположим, что объем воды в песке и объем воздушных полостей связаны соотношением $V_{возд} = k \cdot V_{вод} + V_{возд}^{(0)}$, где $V_{возд}^{(0)}$ – объем воздушных полостей при нулевой влажности. Можно ли считать коэффициент пропорциональности k постоянным на всем возрастающем прямолинейном участке графика? Найдите значение коэффициента k в середине этого участка графика. Известно, что плотность сухого песка $\rho_{сух}$ в 1,6 раз больше плотности воды $\rho_{вод}$.

Ю.Черников, П.Крюков

8 класс

1. Крионасос (8 баллов)

В криогенном эксперименте поток газообразного азота, распространяющийся в вакуумной камере, направляется на охлаждаемую до низкой температуры $T_к = -243$ °C поверхность (криопанель), на которой газ может превращаться в твердое тело (процесс десублимации). Скорость потока азота равна $v = 200$ м/с и направлена перпендикулярно криопанели, температура в потоке $T_0 = -173$ °C. Определите максимальное значение плотности газообразного азота, при котором на криопанели десублимируется весь натекающий газ. Холодильное оборудование может обеспечить отвод тепла в количестве не более чем 0,4 Дж с 1 см^2 поверхности криопанели за 1 секунду. Удельная теплота сублимации азота $L = 225$ кДж/кг. Удельная теплоемкость азота (при данных условиях) $c = 1{,}0$ кДж/(кг · °C). Площадь сечения потока на входе равна площади криопанели. Кинетической энергией натекающего газа можно пренебречь.

П.Крюков

2. Ричстакер (10 баллов)

Рисунок 4, на котором изображен погрузчик для работы с контейнерами – ричстакер, воспроизводит схему из буклета производителя, китайской фирмы «Sany». Прямоугольники символизируют контейнеры, масса которых указана в тоннах. Линейные размеры даны в миллиметрах. Масса этого ричстакера 72 тонны, расстояние между осями передних и задних колес 6 м, внешний диаметр покрышки колеса 1670 мм. Рисунок показывает, что при данном расположении погрузчик может приподнять любой из изоб-

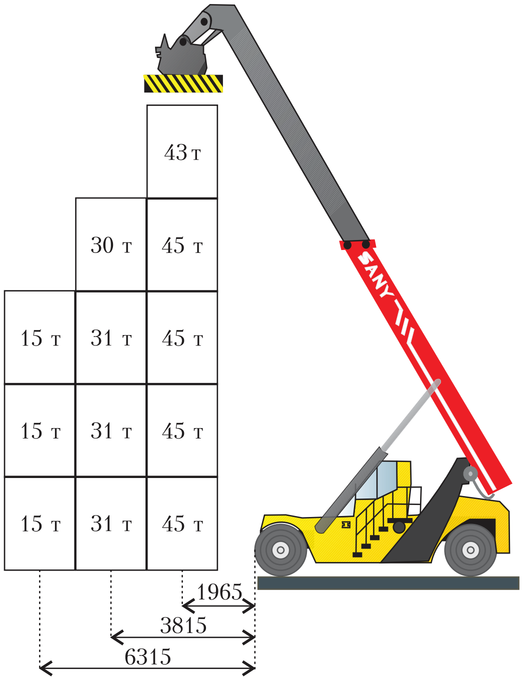


Рис. 4

раженных контейнеров (предварительно убрав другие, если потребуется). При этом угол наклона стрелы и ее длина могут изменяться.

1) Пусть ричстакер «разбирает» ближайшую к себе стопку контейнеров. На какую максимальную величину изменяется сила давления передних колес на поверхность земли в момент, когда погрузчик приподнимает контейнер из этой стопки? Считайте, что в момент подъема каждого из контейнеров положение погрузчика в точности совпадает с показанным на рисунке. (4 балла)

2) На каком расстоянии по горизонтали от оси заднего колеса может располагаться центр тяжести погрузчика, если для его безопасной работы необходимо, чтобы сила давления пары колес (передних или задних) всегда была не меньше шестой части веса погрузчика без контейнера? (6 баллов)

Считайте, что при изменении длины стрелы и ее наклона центр тяжести погрузчика по горизонтали не смещается. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

П.Крюков

3. Студент, дельфин, модель (12 баллов)

Студент-биофизик исследует физические основы плавания дельфинов. Он рассматривает следующую простую модель. Объем дельфина складывается из объема тканей тела $V_т$, несжимаемых при погружении, и объема различных газовых полостей $V_г$ (например, легких), который при погружении уменьшается под действием давления воды. Студент считает, что согласно газовым законам произведение давления $p(h)$ на глубине h на объем $V_г(h)$ для неизменной массы газа должно оставаться постоянным на всех глубинах:

$$p(h)V_г(h) = \text{const}.$$

Пусть дельфин движется вертикально вниз с характерной для себя скоростью v. Расчеты студента показывают, что по достижении нижней критической глубины $h_н = 30$ м дельфин может продолжать движение вниз, не совершая никаких усилий. Иначе говоря, не создавая силы тяги. При движении вертикально вверх с той же скоростью v, достигнув верхней критической глубины $h_в = 10$ м, дельфин продолжит всплывать, не создавая силы тяги. Атмосферное давление равно $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды и ускорение свободного падения равны $\rho = 1000$ кг/м^3 и $g = 10$ Н/кг. Плотность тканей тела отличается от плотности воды на 2 %. Зависимость силы сопротивления воды от скорости неизвестна.

1) Определите отношение объема тканей тела к объему газовых полостей при нулевой глубине $\frac{V_т}{V_г(0)}$. Можно считать, что при нулевой глубине газовые полости заполнены воздухом при атмосферном давлении p_0. (10 баллов)

2) Экспериментально наблюдаются такие значения критических глубин: $h_н \approx 67$ м и $h_в \approx 6$ м. Чем может быть обусловлено расхождение предсказаний модели студента и экспериментальных данных? (2 балла)

П.Крюков

4. Аквариум (10 баллов)

Аквариум в виде куба со стороной $a = 40$ см заполнен водой доверху. Аквариум начинают очень медленно поворачивать вокруг одного из ребер так, что угол φ между дном аквариума и горизонтальной поверхностью увеличивается на 1° каждые 10 секунд, при этом вода из аквариума вытекает. Скорость истечения воды количественно характеризуется расходом $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, где Δm – масса воды, вытекающая из аквариума за малое время Δt. Расход Q меняется в зависимости от угла φ. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

1) Найдите (можно приближенно) массу воды, вытекающей из аквариума в первые 10 секунд. (3 балла)

2) Чему равен угол φ в момент, когда расход воды достигает максимального значения Q_{max}? (4 балла)

3) Определите (можно приближенно) максимальное значение расхода Q_{max}. (3 балла)

Примечание. При решении задачи могут оказаться полезными следующие геометрические соотношения.

1. В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

2. Площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 и малым острым углом α (измеряется в градусах) приближенно равна $\frac{\pi\alpha}{360°}$. Малыми вполне можно считать углы меньше 10°.

С.Дворянинов

9 класс

1. Ножки начинают отрываться (10 баллов)

К гладкому горизонтальному полу прибита тонкая (высотой примерно 1 см) планка. Вася приставил к планке стул передними ножками, привязал к верхней точке спинки стула веревку и с помощью динамометра выяснил, что задние ножки стула отрываются от пола, когда к веревке перпендикулярно планке прикладывается горизонтальная сила $F_1 = 16$ H. Затем он изменил положение стула, и теперь стул касается планки своими задними ножками. В этом случае минимальная сила, приложенная перпендикулярно планке в горизонтальном направлении и необходимая, чтобы передние ножки оторвались от пола, оказалось равной $F_2 = 12$ H. Расстояние между ножками стула $a = 42$ см (рис. 5). Высота верхней точки спин-

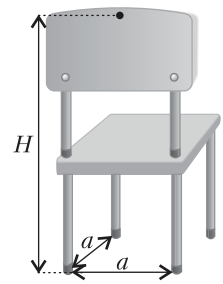


Рис. 5

ки стула над полом $H = 72$ см. Можно считать, что эта точка находится ровно над линией задних ножек. Какую минимальную силу F_3 нужно приложить к веревке, чтобы от пола оторвались левые ножки стула, если стул приставлен к планке правыми ножками? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Правая и левая половинки стула симметричны.

С.Варламов

2. Резистор начинает плавиться (10 баллов)

При пропускании тока через проволочный резистор он нагревается, при этом его температура в зависимости от протекающего тока изменяется нелинейно. При малых токах, составляющих для типичных резисторов величину порядка 10 мА, температура резистора T практически неотличима от температуры окружающей среды T_0. При увеличении тока до некоторого предельного значения I_{max} резистор очень быстро (почти мгновенно) нагревается до очень высокой температуры и плавится (сгорает).

Пусть сопротивление некоторого резистора при комнатной температуре и токе 1 мА равно 10 Ом. Известно, что значение предельного тока для этого резистора $I_{max} = 1{,}35$ А. Найдите сопротивление резистора и напряжение на нем при токе $0{,}8I_{max}$. Можно считать, что сопротивление резистора зависит от температуры линейно: $R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$, где R_0 – сопротивление резистора при температуре T_0, α – неизвестный коэффициент. Мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур резистора и окружающей среды. Изменение сопротивления резистора не влияет на величину силы тока в цепи.

П.Крюков

3. Регби (10 баллов)

Регби – это командная игра с мячом. Цель игры – принести мяч в зачетное поле соперника, расположенное за линией ворот (рис. 6). Игрок с мячом может отдать передачу другому игроку своей команды, причем передачу нельзя делать вперед относительно воображаемой линии, параллельной линии ворот и проходящей через игрока (прямая a на рисунке). Пасовать можно только вбок или назад относительно этой линии. Игроки команды соперника имеют право остановить игрока с мячом. На рисунке представлен фрагмент поля с тремя регбистами: A и B – игроки из одной команды, C – игрок команды соперника. Игрок C вот-вот остановит игрока A, поэтому тот делает передачу игроку B. Чтобы сделать точную передачу, игрок A предварительно притормозил, и в момент броска его скорость направлена в сторону линии ворот и равна $v = 2$ м/с. Пусть скорость игрока B равна 8 м/с при движении по любой траектории. Расположение игроков A, B и C на поле, показанное на рисунке, соответствует моменту броска. Можно считать, что мяч после броска игрока движется прямолинейно с постоянной скоростью.

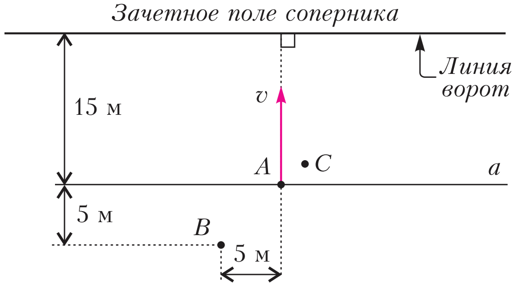


Рис. 6

1) С какой минимальной скоростью (относительно себя) должен бросить мяч игрок A, чтобы игрок B принял передачу и добежал до зачетного поля соперника за минимальное время? (2 балла)

2) Пусть игрок A отдает передачу «на ход» игроку B с относительной скоростью 6 м/с. Игрок B принимает мяч в движении и добегает до линии ворот за время t. Докажите, что минимальное значение времени t_{min} достигается в том случае, когда после броска игрока A мяч летит параллельно линии ворот. (4 балла)

3) Найдите время t_{min}. Утверждением из п. 2) можно пользоваться без доказательства. (4 балла)

А. Бычков

4. Вова начинает расчеты (10 баллов)

Вова с папой поехали на машине из Москвы в Санкт-Петербург. На трассе скорость их автомобиля была не более 110 км/ч, но не менее 80 км/ч. От скуки Вова решил снять видео на смартфон. В поле съемки попал джип, двигавшийся некоторое время по соседней полосе с той же скоростью, что и автомобиль Вовиного папы. И тут Вова обнаружил, что на экране его телефона радиальные поперечины на диске колеса джипа (форма диска показана на рисунке 7) либо стоят на месте, либо медленно вращаются, совершая не более одного оборота за время около 10 с. Позже на стоянке по маркировке на покрышке обогнавшего их джипа Вова определил диаметр его колеса, получилось 72 см. Вова знает, что его смартфон снимает видео с частотой 30 кадров в секунду. Он считает, что каждый кадр представляет собой мгновенную фотографию. Вова подумал, что по имеющимся данным он может не просто определить скорость v джипа в тот момент, когда он поравнялся с машиной папы, но и указать границы интервала $v_{\min} < v < v_{\max}$, в пределах которого лежит значение скорости v.

Рис. 7

1) Чему может быть равна скорость v? Достаточно одного значения. (8 баллов)

2) Определите границы интервала $v_{\min}$ и $v_{\max}$ возможных скоростей. (2 балла)

Ю.Черников, П.Крюков

5. Тень начинает притягиваться (10 баллов)

Широко известен опыт, который обычно называют «притягивающиеся тени». Протяженный источник света освещает два предмета, и тень одного как бы притягивается к тени другого. Опыт иллюстрируют рисунки 8 и 9.

Рассмотрим упрощенную схему опыта, изображенную на рисунке 10. Протяженный источник AB с поперечным размером $D = 6$ см освещает книжку и линейку. Он расположен так, что осевая линия c проходит через середину отрезка AB. Расстояния, обозначенные на рисунке, известны, $a = 10$ см.

Рис. 8. Лампа освещает линейку и книжку. На стене наблюдаются тени

Рис. 9. Область «притягивающихся» теней. Фрагмент фотографии сильно увеличен

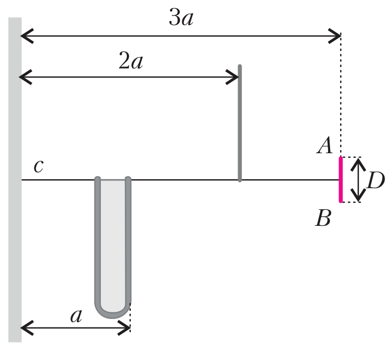


Рис. 10

Книжка и линейка отстоят от осевой линии c на одинаковое (неизвестное) расстояние d, как схематично показано на рисунке 11 (соотношения между длинами изменены для удобства восприятия). При каких значениях d на стене между областью полной тени линейки и областью полной тени книжки будет наблюдаться область полутени? Рассмотрите два случая.

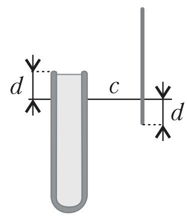


Рис. 11

1) Точки отрезка AB излучают изотропно (равномерно по всем направлениям). (6 баллов)

2) Любая точка источника испускает лучи света, составляющие с осевой линией угол не более чем α, при этом $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}15$. (4 балла)

Примечание. Полной тенью называется область на стене, в которую не попадает ни один луч света от источника.

П.Крюков

10 класс

1. Измерение отклонений (10 баллов)

Сопротивление терморезистора сильно зависит от температуры (рис. 12), поэтому его используют в точных измерителях отклонения температуры ΔT от заданного значения T_0. Схема измерителя показана на рисунке 13, терморезистор обозначен R_t. Сопротивление переменного резистора R_1 можно изменять в диапазоне от 0 до 900 Ом. Выводы подключают к идеальному источнику напряжением $U_0 = 6$ В. Перед началом измерения отклонения ΔT от температуры T_0 измеритель калибруют, подбирая сопротивление резистора R_1 так, чтобы идеальный стрелочный милливольтметр показывал ноль. В дальнейшем при изменении температуры на ΔT сопротивление терморезистора изменяется, милливольтметр показывает напряжение U.

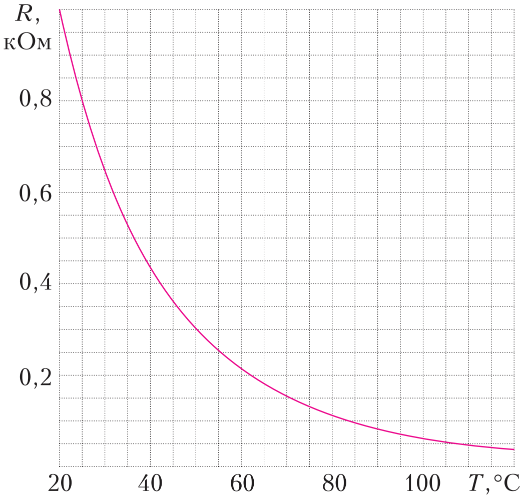


Рис. 12

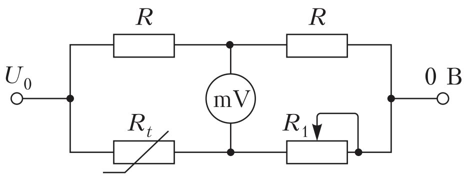


Рис. 13

1) Для $T_0 = 50$ °C определите зависимость $U(\Delta T)$, считая изменение сопротивления терморезистора малым. В области каких температур (высоких или низких) измеритель обеспечивает меньшую относительную погрешность измерения? (7 баллов)

Примечание. Может оказаться полезной приближенная формула $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, справедливая для малых x $(x \ll 1)$.

2) В каком диапазоне температур может работать данный измеритель, если нежелательно, чтобы на терморезисторе выделялась тепловая мощность больше $P_0 = 0{,}15$ Вт? (3 балла)

П.Крюков

2. Мальчик с шариком (10 баллов)

Мальчик Влад бегает по кругу, держа в руке конец нитки длиной $2\sqrt{2}$ м, к другому концу которой прикреплен небольшой надувной шарик с гелием внутри. Один круг Влад пробегает за 2π секунд. Рука, держащая нить, движется по окружности радиусом 2 м. Шарик движется по окружности такого же радиуса на два метра выше руки по вертикали. С какой установившейся скоростью будет взлетать шарик, если нить отпустить? Можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шарика, а радиус шарика много меньше длины нити. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

С.Варламов, П.Крюков

3. Эолипил (10 баллов)

Эолипил (паровой двигатель, изобретенный в Древней Греции) представляет собой металлический котел с двумя трубками на крышке, на которых, как на оси, может вращаться турбина в виде полого шара с двумя одинаковыми Г-образными патрубками (соплами). В котел заливают воду, герметично закрывают его и ставят на огонь. Образовавшийся при кипении водяной пар по трубкам поступает в шар и выходит с большой скоростью через сопла, заставляя шар вращаться (рис. 14; взят из «Википедии»).

Рис. 14

Пусть мощность подвода тепла в воде равна $P = 1$ кВт, площадь сечения патрубка $S = 0{,}1$ см^2, а расстояние от сопла до оси вращения $d = 10$ см. Считайте, что из сопла выходит насыщенный пар при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па. Молярная масса воды и ее удельная теплота парообразования равны $\mathrm{M} = 18$ г/моль и $L = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг соответственно. Трением в оси и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) Определите момент сил, действующих на шар со стороны пара, если шар зафиксирован.

2) Какое максимальное количество оборотов в минуту будет делать шар, если ему позволить свободно вращаться?

М.Ромашка

4. Автомобильное зеркало (10 баллов)

При падении света на границу раздела воздух–стекло (показатель преломления стекла $n = 1{,}5$) под малым углом к нормали доля $R = 4\%$ энергии падающего излучения отражается, а доля $T = 96\%$ энергии проходит во вторую среду. При этом не важно, в какую сторону распространяется свет: из воздуха в стекло или из стекла в воздух.

К идеальному зеркалу (отражающему весь падающий свет) прислонили стеклянный клин (призму) размером $d = 10$ см с малым

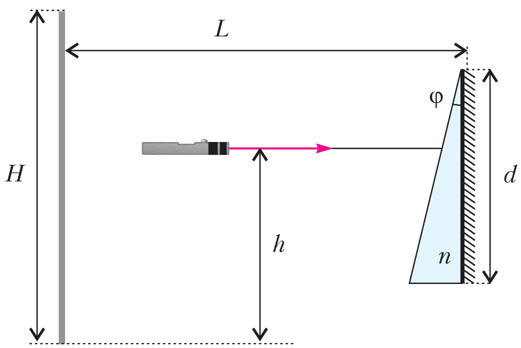


Рис. 15

углом $\varphi = 0{,}06$ рад при вершине (рис. 15). На призму падает лазерный луч, направленный по нормали к зеркалу. При этом на экране высотой $H = 40$ см, расположенном параллельно зеркалу на расстоянии $L = 1$ м от него, наблюдают несколько пятен разной яркости. Расстояние от лазерного луча до нижнего края экрана по вертикали $h = 25$ см.

1) Найдите приближенно расстояние от верхнего края экрана до каждого пятна и подсчитайте долю энергии падающего излучения (в процентах, округлив до целых), приходящуюся на лучи, формирующие это пятно. Учтите, что приближенные соотношения $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ с хорошей точностью выполняются даже для углов около 0,4 рад. (6 баллов)

2) На какой угол следует повернуть зеркало с призмой в плоскости рисунка, чтобы на месте самого яркого пятна оказалось другое, следующее по яркости? (3 балла)

3) Автомобильная компания Chrysler в 1958 году использовала зеркало с призмой в качестве зеркала заднего вида с двумя режимами работы. С помощью специального рычажка его можно было перевести из «дневного» режима в «ночной» так, чтобы свет фар едущих сзади автомобилей, отраженный зеркалом, не слепил водителя. Объясните принцип работы такого автомобильного зеркала. (1 балл)

А.Бычков

5. Морозильник с горячей стенкой (10 баллов)

Задняя стенка не очень современного морозильника, на которой располагаются трубки конденсатора холодильной машины, работающей по обращенному циклу Карно, греется, так что ее средняя температура T_S в рабочем режиме выше температуры в комнате T_R. Внутри морозильной камеры холодильная машина поддерживает температуру $T_C = -23$ °С.

Известно, что в стационарном режиме, когда температура задней стенки и температура в камере установились, а температура в комнате не меняется со временем, мотор компрессора этого не очень современного морозильника работает без остановки.

В жару, когда температура в комнате поднимается до $T_R^{(0)} = +27$ °С, задняя стенка нагревается до $T_S^{(0)} = +47$ °С. Определите температуру задней стенки морозильника зимой в холодный день, когда температура воздуха в комнате уменьшается до $T_R^{(1)} = +17$ °С.

Мощность передачи тепла от горячего тела к холодному за счет теплопроводности (например, от воздуха в комнате холодильной камере через уплотнительные прокладки на дверце) пропорциональна разности соответствующих температур. При этом следует считать, что от горячей стенки за счет теплопроводности внутрь морозильника тепло не поступает.

П.Крюков, А.Дергачев

11 класс

1. Колебания внутри трубы (10 баллов)

На внутренней поверхности трубы радиусом R, вращающейся с некоторой угловой скоростью вокруг горизонтальной оси симметрии (точка A на рисунке 16), находится небольшое тело. В положении равновесия тело располагается ниже оси трубы на расстоянии $0{,}8R$ по вертикали от нее. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

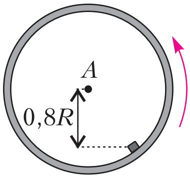


Рис. 16

Примечание. Для малого угла δ $(\delta \ll 1)$ и произвольного угла α справедливы приближенные равенства $\sin(\alpha+\delta) \approx \sin\alpha + \delta\cos\alpha$ и $\cos(\alpha+\delta) \approx \cos\alpha - \delta\sin\alpha$.

Американский фольклор

2. Стол на тонких ножках (12 баллов)

Стол стоит на горизонтальном полу. Столешницу и пол можно считать абсолютно твердыми, а ножки – упругими, подчиняющимися закону Гука при вертикальных деформациях. Гирю массой 24 кг ставят на стол так, что ее центр масс располагается в

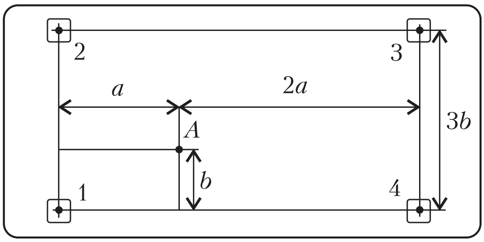


Рис. 17

точке A (рис. 17; вид сверху). На сколько изменяются силы давления ножек стола: ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3 и ΔF_4 на пол после этого? Номера ножек показаны на рисунке. Горизонтальными деформациями ножек можно пренебречь.

А.Бычков

3. Вода–пар–вода (14 баллов)

Воде массой $m = 180$ г при постоянном давлении $p_1 = 10^5$ Па сообщают некоторое

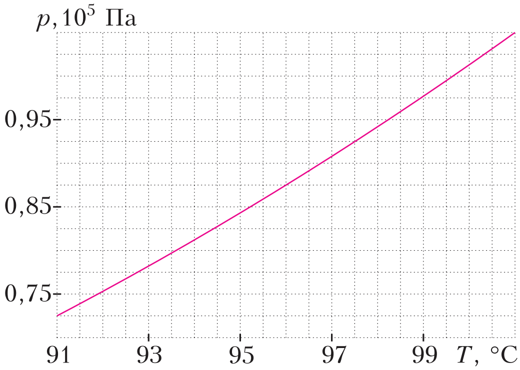


Рис. 18

количество теплоты, так что она превращается в пар и нагревается до температуры $T_1 = 105$ °C. Далее пар адиабатически расширяется и в какой-то момент приходит в состояние насыщения, после чего конденсируется. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке 18. Считая изменение параметров пара при адиабатическом расширении малым, определите приближенно температуру воды в начале конденсации. Чему равна суммарная работа пара при его нагревании после испарения и охлаждения до начала конденсации? Молярная теплоемкость пара при постоянном объеме $C_V = 3R$.

Примечание. Для малых изменений Δp и ΔV величин p и V справедлива приближенная формула $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$.

П.Крюков

4. Каустика (18 баллов)

Каустика – это огибающая семейства лучей, не пересекающихся в одной точке. В плоском случае, рассматриваемом в этой задаче, каустика – это кривая, которой касаются все лучи, отражающиеся от некоторой поверхности или испытывающие преломление на некоторой границе раздела. Интенсивность света вблизи каустик возрастает, поэтому кривые каустик хорошо видны невооруженным глазом и на фотографиях.

1) Кривая синего цвета на рисунке 19 – это каустика, образованная после отражения пучка парал-

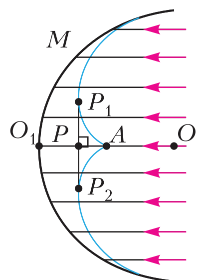


Рис. 19

лельных лучей цилиндрической поверхностью M, радиус которой равен R. Определите расстояние от оси цилиндра O до вершины каустики A, а также расстояние PA. Здесь OO_1 – ось симметрии, P_1P_2 – касательная к каустике. (5 баллов)

2) Источник, освещающий цилиндрическую поверхность радиусом R, располагается на расстоянии $a = 4R$ от точки O на оси симметрии системы OO_1 (рис 20). Определите расстояние от точки O до вершины каустики, формируемой отраженными лучами в этом случае. (4 балла)

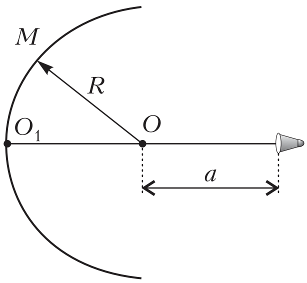


Рис. 20

В тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан наливают воду и освещают светом фонаря. Ось пучка света составляет разные углы α с горизонтальной поверхностью стола. В пункте 3 стакан фотографируют сверху (оптическая ось объектива перпендикулярна дну стакана) и освещают справа (рис. 21), а в пункте 4 ось объектива немного отклоняется от вертикали (рис. 22).

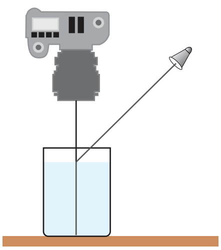


Рис. 21

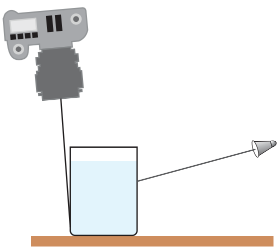


Рис. 22

3) Величина угла α – около $45°$. Вблизи дна стакана наблюдается кривая с двумя вершинами, части которой напоминают кривую из пункта 1. На рисунке 23 вершины обведены квадратиками. Объясните наблюдаемую картину. (3 балла)

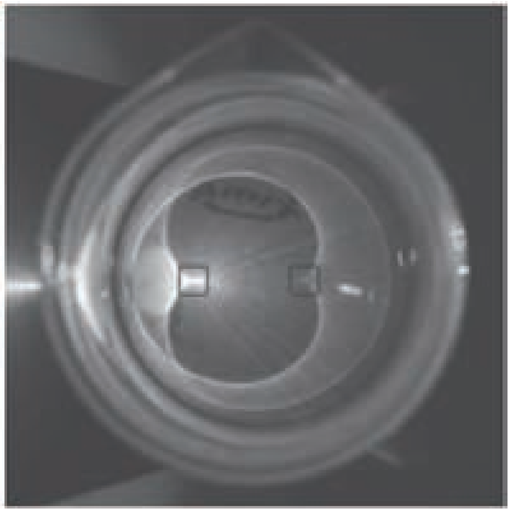


Рис. 23

4) Радиус основания стакана R = 4 см. Фонарь располагается на расстоянии $a \approx 10R$ от оси стакана. Угол α можно считать малым. Снаружи стакана видна каустика, образованная прошедшими через стакан лучами (рис. 24). Определите приближенно расстояние от стакана до вершины каустики (до вершины «конуса»). Показатель преломления воды $n \approx 1{,}33$. (6 баллов).

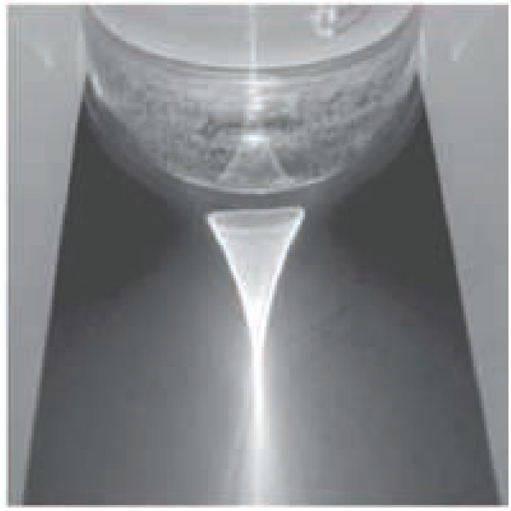


Рис. 24

А.Бычков, П.Крюков

5. Тепловой индуктор (18 баллов)

Элемент Пельтье состоит из двух пластин, разделенных большим количеством полупроводниковых блоков (рис.25; взят из «Википедии»), и представляет собой преобразователь электрической энергии в тепловую. Он также может работать и в обратном режиме – вырабатывать ЭДС при наличии разности температур на пластинах.

На рисунке 26 схематично изображено устройство на основе элемента Пельтье. Ниж-

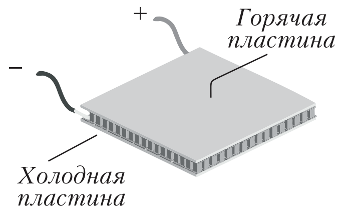


Рис. 25

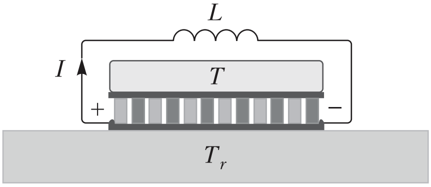


Рис. 26

няя пластина находится в контакте с «тепловым резервуаром» – большим телом, температуру которого T_r можно считать постоянной. Верхняя пластина контактирует с телом с теплоемкостью C и температурой T, которая изменяется со временем. Сверхпроводящая катушка с индуктивностью L включена между контактами элемента. В начальный момент $T = T_0$, $T_0 > T_r$.

В данных условиях верхнее тело отдает элементу за время Δt количество теплоты $\Delta Q = \alpha T I \Delta T$, где α – постоянный коэффициент, I – ток через элемент. В то же время тепловой резервуар получает от элемента некоторое меньшее количество теплоты, формула которого для решения задачи не нужна. Элемент Пельтье при этом вырабатывает ЭДС $\mathcal{E} = \alpha(T - T_r)$. Полярность создаваемой ЭДС (для $T > T_r$) совпадает с указанной на рисунке. Положительным направлением тока считается направление от «плюса» к «минусу». Сопротивление элемента Пельтье равно R.

Оказывается, в рассматриваемой системе возможно периодическое изменение температуры тела $T(t)$ и тока в цепи $I(t)$. В задаче предлагается исследовать колебания тока и температуры при различных значениях параметров T_r, T_0, C, α, R, L, которые считаются известными. Ток в цепи в начальный момент равен нулю: $I(0) = 0$. Разность температур тела и резервуара можно считать малой: $|T - T_r| \ll T_r$ в любой момент времени.

1) Рассмотрим идеализированный случай, когда сопротивление R равно нулю и теплообмен между тепловым резервуаром и телом за счет теплопроводности отсутствует, а учитывается только теплообмен между телом и верхней пластиной элемента.

1а. Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$. (2 балла)

1б. Преобразуйте полученное уравнение с учетом условия $|T - T_r| \ll T_r$ и найдите частоту ω_0 колебаний тока. (3 балла)

1в. Найдите зависимость температуры тела от времени $T(t)$. (1 балл)

2) Физически случай, описанный в пункте 1, никогда не реализуется. Рассмотрим параметры системы, близкие к реальности. Пусть известно сопротивление элемента R, мощность передачи тепла от тела резервуару за счет теплопроводности определяется соотношением $P = k(T - T_r)$, где k – известный коэффициент, а джоулево тепло, выделяющееся в элементе, делится поровну между пластинами. В этом случае колебания будут затухающими.

2а. Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$. (3 балла)

2б. Преобразуйте полученное уравнение с учетом условия $|T - T_r| \ll T_r$ к виду $I'' + 2\gamma I' + \omega^2 I = 0$ (уравнение затухающих колебаний). Чему равны коэффициенты γ и ω? Каков их физический смысл? (4 балла)

2в. Полагая затухание слабым $(\gamma^2 \ll \omega^2)$, определите относительное изменение амплитуды тока за период $\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}}$. Ответ выразите через коэффициенты уравнения колебаний γ и ω. (3 балла)

3) Предлагается создать на основе данного устройства установку для точного измерения теплоемкости тел. Параметры T_r, α, k, R, L известны, их измерили раньше с высокой точностью. В распоряжении экспериментатора есть электроизмерительные приборы, осциллограф и генератор переменного напряжения, частоту которого можно менять в широком диапазоне. Опишите коротко возможную схему эксперимента. (2 балла)

П.Крюков

Публикацию подготовили П.Крюков, Д.Глазов, А.Дергачев

«Квант» для младших школьников

Задачи

(*см. «Квант» №3*)

1. Выберем цифры 0, 3 и 6. Тогда число 360 делится на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и на 10, а число 630 – на 7.

2. Не могло.

Предположим, что в зале мог быть ровно 101 человек. Так как каждый указал на одного из присутствующих, а на каждого из присутствующих кто-то указал, то на каждого указал ровно один из присутствующих. Заметим, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря.

Посмотрим теперь на какого-нибудь рыцаря А. Он указал на какого-то лжеца. Тот указал на какого-то рыцаря. Продолжая эту «цепочку», мы получим, что рано или поздно какой-то лжец укажет на рыцаря А, так как на других людей в цепочке уже кто-то указал. Поэтому все присутствующие разобьются на замкнутые цепочки (циклы) четной длины (возможно, длины 2). Но 101 – нечетно. Противоречие.

3. Через 157,5 минут.

Пусть S – длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго – $S/7$, третьего – $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T(S/5 - S/7) = nS$, $T(S/7 - S/9) = mS$, где n, m – натуральные числа. Отсюда $n/m = 9/5$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T(1/5 - 1/7) = 9$. Тогда минимальное время равно $T = 9(7\cdot 5)/(7-5) = 157{,}5$.

4. Получится правильный октаэдр с вершинами в центрах граней куба (рис.1).

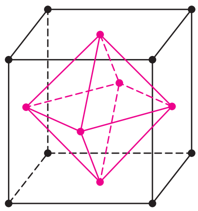


Рис. 1

Конкурс имени А.П.Савина

(*см. «Квант» №2*)

21. 2020.

Предположим, что это число вида 1***. В нем один 0 и хотя бы одна 1 (она уже стоит на первом месте). Значит, количество других цифр вместе не больше двух, тогда и по величине остальные цифры не больше 2. Так как число при этом больше 1210, то оно вида 12**. Тогда в нем один 0, две 1 и одна 2, а таких чисел, больших 1210, нет. Итак, этот случай невозможен.

Если число начинается с 2 и меньше 2020, то оно вида 200* или 201*. Первый вариант невозможен из-за того, что 2 в нем есть, а ее быть не должно. Во втором варианте аналогичная проблема с 1.

22. *Первое решение.* Обозначим точки, как на рисунке 2. Используя подобие треугольников BPQ и BMK и очевидные равенства отрезков, получим

$$\frac{BP}{PS} = \frac{BP}{PQ} = \frac{BM}{MK} = \frac{BM}{MA}.$$

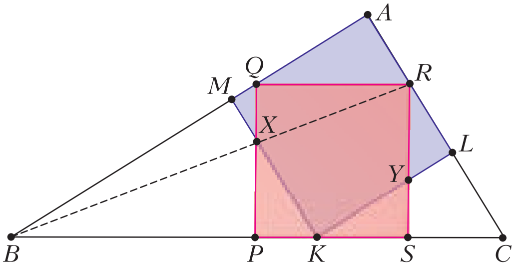


Рис. 2

Приведем два возможных способа завершить доказательство.

1) Рассмотрим гомотетию с центром B, переводящую P в S. Из доказанного равенства отношений $\frac{BP}{PS} = \frac{BM}{MA}$ следует, что при этой гомотетии M перейдет в A. Тогда прямая PX перейдет в параллельную ей прямую SR; аналогично, прямая MX перейдет в AR. Значит, точка X пересечения PX и MX перейдет в точку R пересечения SR и AR. Следовательно, X и R лежат на одной прямой с центром гомотетии B (рис.3).

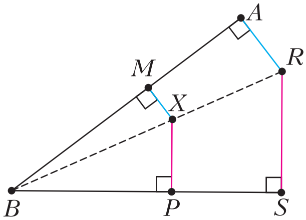


Рис. 3

2) Пусть BR пересекается с MK в точке X_1, а с PQ – в точке X_2. Покажем, что эти две точки совпадают. По теореме Фалеса, $\frac{BX_1}{X_1R} = \frac{BM}{MA}$. Аналогично, $\frac{BX_2}{X_2R} = \frac{BP}{PS}$. Следовательно, $\frac{BX_1}{X_1R} = \frac{BX_2}{X_2R}$, т.е. точки X_1 и X_2 совпадают, тогда они совпадают и с X, а это значит, что X лежит на BR.

Второе решение. Докажем равенство треугольников PXK и SKY. Несложно понять, что они подобны. Рассмотрим квадрат (на рисунке 4 он желтый) с углом A, описанный вокруг квадрата $PQRS$. Разность сторон желтого и синего квадратов как раз равна соответствующим высотам этих двух треугольников. Тогда соответствующие высо-

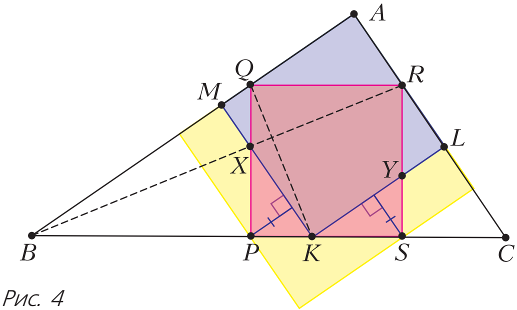


Рис. 4

ты подобных треугольников равны, а значит, и эти треугольники равны. Следовательно, при повороте квадрата $PQRS$ вокруг своего центра на 90° точка X переходит в точку K, а отрезок RX – в QK, поэтому $RX \perp QK$. В треугольнике BKQ высоты KM и QP пересекаются в точке X, значит, $BX \perp QK$. А раз BX и RX перпендикулярны одной и той же прямой, то B, X и R коллинеарны, что и требовалось доказать.

23. Данное в условии неравенство представляет собой сумму трех неравенств такого вида:

$$\frac{y}{y^2+z} \le \frac{\sqrt{xy}}{2}.$$

Другие два получаются циклическим сдвигом переменных x, y, z. Докажем одно это неравенство, а другие будут доказываться аналогично. Цепочкой равносильных преобразований сведем его к более простому:

$$2y \le \left(y^2+z\right)\sqrt{xy},\ 2y\sqrt{z} \le \left(y^2+z\right)\sqrt{xyz},$$

$$2y\sqrt{z} \le y^2+z.$$

Здесь уже можно заметить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом либо продолжить преобразования:

$$0 \le y^2+z-2y\sqrt{z},\ 0 \le \left(y-\sqrt{z}\right)^2.$$

Справедливость последнего уже очевидна.

24. 1756863020.

Для начала разрешим фишкам одновременно занимать одну клетку и посчитаем, сколько всего будет способов совершить передвижения с учетом такого разрешения. У красной фишки есть C_{18}^9 способов[1] дойти до другого угла, потому что всего ей придется сделать 9 шагов вверх и 9 вправо, иными словами – выбрать, какие 9 шагов из 18 делать вправо, а остальные она будет делать вверх. Столько же способов есть у синей фишки дойти до противоположного угла. Значит, вариантов передвижения двух фишек, т.е. всевозможных пар их маршрутов, всего $\left(C_{18}^9\right)^2$.

Теперь надо убрать из этих вариантов те, где фишки одновременно занимали одну клетку. После 9-го шага обе фишки окажутся на диагонали. До этого и после этого они будут находиться по разные стороны от диагонали. Значит, встретиться фишки могут только на диагонали после 9-го шага.

Пронумеруем клетки этой диагонали числами от 0 до 9 слева направо. Посчитаем количество таких вариантов передвижений, когда они встретились на поле номер k (рис.5; здесь $k = 3$). И путь красной фишки должен пролегать через эту клетку, и путь синей. Посчитаем, сколько последовательностей из 18 ходов красной фишки задают маршрут, проходящий через эту клетку. Из первых 9 ходов ровно k должны быть вправо (остальные – вверх), а из

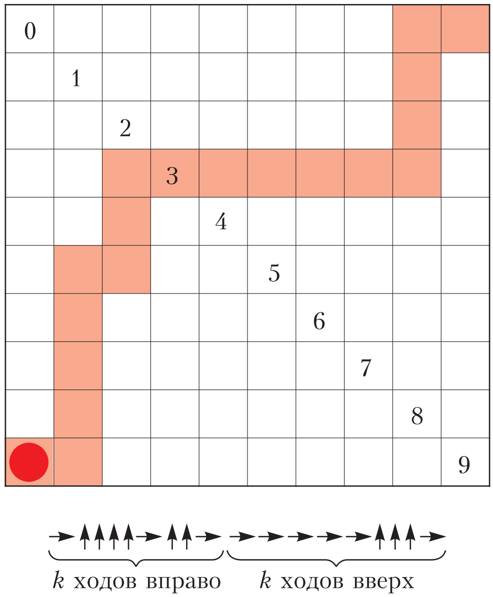


Рис. 5

последних 9 ходов ровно k должны быть вверх (остальные – вправо). Значит, таких маршрутов $\left(C_9^k\right)^2$. Но и маршрут синей фишки тоже должен лежать через эту клетку, и таких маршрутов столько же. Значит, всевозможных передвижений пары фишек (т.е. пар маршрутов), которые надо убрать, $\left(C_9^k\right)^4$. Пройдя все возможные k, получим, что надо вычесть сумму $\left(C_9^0\right)^4+\left(C_9^1\right)^4+\left(C_9^2\right)^4+\ldots+\left(C_9^9\right)^4$. Применив формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$, это выражение можно записать короче:

$$2\left(\left(C_9^0\right)^4+\left(C_9^1\right)^4+\left(C_9^2\right)^4+\left(C_9^3\right)^4+\left(C_9^4\right)^4\right).$$

Ответ получен:

$$\left(C_{18}^9\right)^2-2\left(\left(C_9^0\right)^4+\left(C_9^1\right)^4+\left(C_9^2\right)^4+\left(C_9^3\right)^4+\left(C_9^4\right)^4\right).$$

Вычислить его можно, подсчитав соответствующие чисела сочетаний по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ или найдя их в треугольнике Паскаля.

Источники электричества

1. Это гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое взаимодействия. Гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью, которую принять называть скоростью света, электромагнитное – в вакууме с ней же, в средах – как повезет (помните формулу с коэффициентом преломления?). Впрочем, скоростей-то две – фазовая скорость и групповая скорость.

2. Трение твердого по мягкому может быть больше, чем по твердому, потому что твердое внедряется в

[1] Как обычно, через C_n^k обозначается количество способов выбрать k предметов из n различных.

мягкое и при движении вынуждено рвать мягкое, т.е. коэффициент трения в паре твердое–мягкое оказывается зависящим от прочности мягкого. Диэлектрическая проницаемость – это ослабление внешнего поля собственным полем зарядов вещества. В неполярной среде – это заряды ядер и электронных оболочек, в полярной – еще и заряды ионов. Электронные оболочки реагируют на внешнее поле быстрее, чем молекулы, но возникающее при этом индуцированное поле слабее. Поэтому у полярной жидкости диэлектрическая проницаемость больше, но она значительно уменьшается с увеличением частоты, когда молекулы не успевают поворачиваться в переменном внешнем поле.

3. При малых токах внутреннее сопротивление r окажется больше среднего значения, при больших – меньше. Оно равно скорости уменьшения напряжения при увеличении тока, т.е. $r = \Delta U/\Delta I$ – следствие закона Ома. При линейной зависимости $U(I)$ мощность тепловыделения действительно $P = I^2 r$, это можно показать прямым вычислением. Для реальной характеристики это не так. Например, рассмотрите ситуацию, когда на характеристике есть хоть небольшой участок с большим значением $\Delta U/\Delta I$. Тогда на этом участке $I^2 r$ вроде бы сколь угодно велико, хотя оно ограничено сверху величиной $\mathscr{E} I$ – полной мощностью источника.

4. Не может быть напряжения на нулевом сопротивлении и не может быть тока через бесконечное сопротивление. Эти модели хорошо работают, т.е. позволяют получать правильные решения, если мы не собираемся использовать, соответственно, очень малые и очень большие сопротивления нагрузки. Конкретно в электронике это бывает нужно достаточно часто для того, чтобы эти модели активно использовались. Модель источника тока проста – это параллельно включенные источник тока I и сопротивление r. Убедитесь прямым расчетом, что в этом случае нагрузочная характеристика – прямая, ток короткого замыкания равен I, а напряжение холостого хода равно rI.

5. Из того, кто создавал магнитный поток – больше неоткуда. Но что изменится, когда поместили проводник? Пошел ток, он создает магнитное поле, направленное против изменений (помните правило Ленца?). И наличие этого «противополя» требует увеличения расхода энергии создателем магнитного потока, если мы хотим, чтобы поток нарастал, как раньше.

6. КПД 100% не бывает, так что греться устройство будет обязано. Максимальная скорость будет там, где произведение напряжения на ток будет максимально, т.е. на перегибе. Там же будет и минимален нагрев.

7. При правильной конструкции максимальное напряжение ограничено пробоем в воздухе вблизи поверхности шара. Электропрочность воздуха около 30 кВ/см. При диаметре шара 2 м максимальное напряжение будет 30 МВ. Энергия накапливается за счет работы по подъему зарядов против поля. Иногда пишут, что ионы перемещаются на шар, но это неправильно – они обмениваются зарядами с шаром и превращаются в атомы.

Об укладке блинов, котлет и апельсинов

1. Обязательно.

Проведем мысленно на большом противне два разреза, соединив середины его противоположных сторон. Противень разделится на четыре одинаковые части вдвое меньшего размера. На каждой из них можно будет разместить 100 маленьких печений – тем же способом, как и большие печенья на исходном противне (на рисунке 6 приведен пример для 5 печений). Ведь размеры печений тоже уменьшились в два раза. В итоге на противне разместятся как раз 400 маленьких печений.

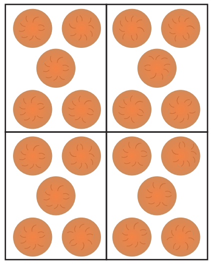


Рис. 6

2. Отметим по периметру верхней части торта пять точек, которые делят периметр на пять частей одинаковой длины, и соединим с этими точками центр квадрата (рис.7). По проведенным линиям разрежем торт. Очевидно, что боковая часть глазури на торте разделится поровну между кусками. Остается доказать, что площади пяти частей на рисунке равны (тогда и торта будет поровну, и глазури на кусках сверху).

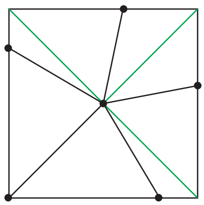


Рис. 7

Разделим четырехугольные части на треугольники. Площадь треугольника равна $ah/2$, где a – основание, а h – высота, проведенная к этому основанию. В каждом треугольнике на рисунке проведем высоту из центра квадрата. Длины этих высот будут одинаковы. Но и основания треугольников (на которые опущены высоты) в каждом куске дают в сумме одно и то же число – пятую часть периметра квадрата. Значит, и площади всех кусков будут одинаковы, что и требовалось.

Другое решение можно получить, мысленно разделив верхнюю (квадратную) часть торта на 25 клеточек. Снова делим периметр квадрата на равные части, а сам квадрат делим на пять частей, площадь у каждой – 5 клеточек, как показано на рисунке 8. Проверьте!

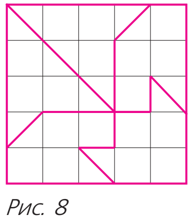


Рис. 8

3. Удастся.

Можно поместить 41 апельсин, уложив их так, как показано на рисунке 9 (апельсины изображаем кругами, центры кругов образуют треугольную решетку). Получается 5 рядов по 5 кругов и 4 ряда по 4 круга: $25 + 16 = 41$. По ширине ряды влезают в коробку, но надо проверить, что и по высоте влезут. Пусть радиус круга 1, тогда высота коробки 16. Проведем в каждом горизонтальном ряду прямую через центры кругов. Расстояние между соседними прямыми равно высоте правильного треугольника со стороной 2, т.е. равно $\sqrt{3}$. Высота конструкции из кругов, т.е. $8\sqrt{3} + 2$, меньше 16, так как $\left(8\sqrt{3}\right)^2 = 192 < 196 = 14^2$.

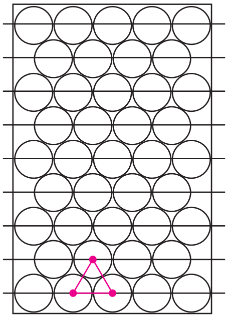


Рис. 9

XLI Турнир городов

Задачи весеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Может.

Один из примеров приведен на рисунке 10. Пустые клетки – королевства, а цифра в клетке обозначает, сколько королевств претендует на эту спорную территорию.

0	2				
1	3			8	
	5	6			
			7		
		4			

Рис. 10

2. 22 числа.

Оценка. Предположим, что получилось выписать такие различные числа $x_1, \ldots, x_{23}$, что сумма каждых 11 подряд идущих равна A или B. Пусть $S_k = x_k + \ldots + x_{k+10}$. Заметим, что $S_k \neq S_{k+1}$ (иначе $x_k = x_{k+11}$). Значит, $S_k = S_{k+2}$. Поскольку $x_1 + S_2 + S_{13} = S_1 + S_{12} + x_{23}$, то $x_1 = x_{23}$. Противоречие.

Пример. Выберем 10 натуральных чисел с шагом 3, а одиннадцатое – дополняющее их сумму до 100. Тогда ряд $x_1, \ldots, x_{11}$, $x_1 + 1$, $x_2 - 1$, $x_3 + 1$, $x_4 - 1$, … …, $x_{11} + 1$ будет искомым. Например, так: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, –35, 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, –34.

3. Построим ромб $APXB$ (рис.11). Тогда четырехугольник $CBXQ$ – тоже ромб, а $ADQX$ – параллелограмм. Поэтому $PB \perp AX \parallel DQ$, т.е. прямая PB

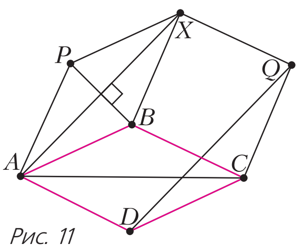


Рис. 11

содержит высоту треугольника DPQ. Аналогично, прямая QB содержит высоту треугольника DPQ, что и требовалось.

4. Доказательство следует из тождества $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yx - zx = (x - z)^2 + (y - z)^2 - (x - z)(y - z)$.

5. Вася.

Вася сделает так, что Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию. После этого Вася сдвинет эту фишку в h8 и победит. До этого Вася придерживается следующей стратегии.

Изначально фишки стоят на диагонали a1 – h8, не соседствуя. Петя сбегает с нее, а Вася, если может, возвращает эту фишку на диагональ, сохранив указанную ситуацию. Вася не сможет это сделать только тогда, когда фишки окажутся в одной или соседних линиях. Тогда Вася сделает такой ход, что фишки образуют доминошку. Ясно, что это возможно. После этого Вася будет сохранять доминошку, т.е. повторять ход Пети другой фишкой. В конце концов Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию.

10–11 классы

1. Можно.

Пример. Сделаем это для произвольной таблицы. Разобьем ее сеткой на прямоугольники так, что ширина полос по каждому направлению чередуется: 1, 2, 1, 2…. Ясно, что это возможно. Тогда таблица разобьется на квадраты 2×2, домино 1×2 и квадратики 1×1. В квадраты впишем двойки, в домино – единицы, в квадратики – нули. Условие будет выполнено, поскольку фигурки одного вида не имеют общих сторон.

2. В четырех местах.

Оценка. Предположим, что хватило трех точек. Они определяют плоскость. Если она проходит через центр сферы, то Саша не бывал в двух полусферах, высекаемых этой плоскостью. Противоречие.

Если не проходит, то параллельной плоскостью отсечем полусферу, в которой Саша не бывал. Во всех полусферах, получаемых из нее малым шевелением, Саша тоже не бывал. Снова противоречие.

Пример. Возьмем на некоторой большой окружности три точки, образующие остроугольный треугольник, и любую точку вне ее (это можно сделать так, что одной из точек будет город, в котором живет Саша, а другой – Аддис-Абеба). Из двух полусфер, высекаемых этой окружностью, Саша не бывал ровно в одной. Если же провести через центр Земли другую плоскость, то она высечет диаметр в исходной окружности, по каждую сторону от которого будет точка, в которой Саша бывал.

3. Верно.

Разобьем все буквы на группы одинаковых подряд идущих. Количество букв нечетно, поэтому найдется «нечетная» группа. Заменами $AA \leftrightarrow BABA \leftrightarrow \leftrightarrow BB$ сделаем из нее однобуквенную группу, после чего будем удалять соседей этой буквы, пока это возможно. Действуя таким образом, оставим только одну букву.

4. Не существует.

Пусть ненулевой многочлен P представим в виде суммы квадратов двух многочленов, т.е. $P = F^2 + G^2$. Заметим, что $F^2 + G^2 = (cF + sG)^2 + (sF - cG)^2$, где $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$. Полагая $0 \le \alpha < \pi/2$, получим бесконечно много представлений.

Допустим, какие-то два из них совпадут, т.е. $(c_1F + s_1G)^2 = (c_2F + s_2G)^2$ или $(c_1F + s_1G)^2 = (s_2F - c_2G)^2$. Перенося влево и раскладывая на множители, получим, что какая-то из скобок равна нулю в бесконечном числе точек, следовательно, в ней стоит нулевой многочлен. Посмотрим на коэффициенты перед F и G в этой скобке. Хотя бы один из них не равен нулю, так как числа $c_1 + c_2$, $c_1 - c_2$, $c_1 + s_2$, $s_1 + c_2$ ненулевые. Значит, F и G линейно зависимы. Можно считать, что $G = tF$ для некоторого числа t. Тогда $P = \left(1 + t^2\right)F^2$. Поскольку F – ненулевой, то, по-разному раскладывая $1 + t^2$ в сумму квадратов двух чисел, получим бесконечное число представлений многочлена P.

5. Пусть A лежит на одной окружности, B – на другой. Два различных случая расположения приведены на рисунках 12 и 13. Решение годится для всех случаев.

По теореме об угле между хордой и касательной получаем равенство ориентированных углов

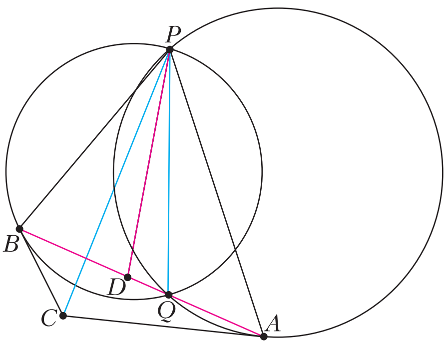


Рис. 12

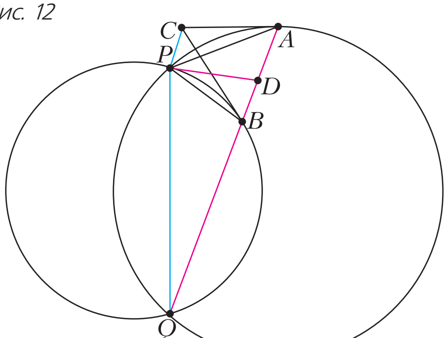


Рис. 13

$(AC, AP) = (AQ, QP) = (BC, BP)$. Следовательно, точка C лежит на описанной окружности треугольника APB. Тогда $(CP, PB) = (CA, AB) = (AP, PQ)$, т.е. биссектрисы неориентированных углов CPQ и BPA совпадают или перпендикулярны. Если точка Q лежит между A и B, то $APBC$ – выпуклый четырехугольник. Если же, например, B лежит между Q и A, то $PBAC$ – выпуклый четырехугольник. В обоих случаях PD – биссектриса треугольника PAB. Нетрудно видеть, что все эти треугольники подобны друг другу и одинаково ориентированы. Значит, все треугольники PAD также подобны друг другу и при движении точки A по окружности D также движется по окружности.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Существует.

Поскольку $2020 = 20 \cdot 101$, то подходит, например, число 1019898767654543 2320.

2. Смогут.

Если число голов четно, богатыри могут уменьшить его, сохранив четность. Действительно, если голов $4n - 2$, то после удара Ильи их станет $2n - 2$. Если же голов $4n$, то после удара Алеши их станет $3n - 3$, а после следующего за ним удара Добрыни их станет $2n - 4$. Богатыри могут так действовать, пока не останется четыре или две головы, для которых хватит одного удара Алеши или Ильи.

3. а) Не существует.

Пусть такой 19-угольник существует. Рассмотрим вписанные углы, опирающиеся на его последовательные стороны. Все они разные, и сумма каждых двух углов, соответствующих соседним сторонам, целая (она дополняет один из углов 19-угольника до $180°$). Рассмотрим два случая.

1) Все эти вписанные углы выражаются целым числом градусов. Тогда их сумма не меньше $1° + 2° + \ldots + 19° > 180°$, что невозможно.

2) Есть угол с ненулевой дробной частью ε. Тогда у соседнего угла дробная часть равна $1 - \varepsilon$, у следующего – снова ε и т.д. Поскольку 19 – нечетное число, то $\varepsilon = 1/2$. Но тогда сумма углов, опирающихся на все стороны, не меньше

$$\frac{1}{2}^{\circ} + 1\frac{1}{2}^{\circ} + 2\frac{1}{2}^{\circ} + \ldots + 18\frac{1}{2}^{\circ} = \frac{1}{2}\left(1° + 3° + 5° + \ldots + 37°\right) = \frac{1}{2} \cdot 361° > 180°.$$

Снова противоречие.

б) Существует.

Пример. Пусть вписанные углы, опирающиеся на последовательные стороны 20-угольника, равны $4\frac{1}{3}^{\circ}, 4\frac{2}{3}^{\circ}, 5\frac{1}{3}^{\circ}, 5\frac{2}{3}^{\circ}, \ldots, 13\frac{1}{3}^{\circ}, 13\frac{2}{3}^{\circ}$. Сумма этих чисел равна $2(4° + 5° + \ldots + 13°) + 10° = 180°$. Каждый угол 20-угольника равен $180°$ минус сумма двух соседних из указанного списка углов, а все эти суммы целые.

4. Для всех $N > 1$.

На рисунках 14 и 15 приведены примеры для $N = 4$ и $N = 5$. Аналогично строятся примеры для всех четных (нечетных) N: в первом столбце реализуются все суммы от 1 до $N-1$, на стыке первого и второго столбцов – от N до $2N-1$, во втором столбце – от $2N$ до $2N-2$ и т.д.

0	4	7	11
1	4	8	11
1	5	8	12
2	5	9	12

Рис. 14

0	5	9	14	18
1	5	10	14	19
1	6	10	15	19
2	6	11	15	20
2	7	11	16	20

Рис. 15

5. Проведем высоту CY (рис.16). Треугольники ADY и AKC равнобедренные и подобные (угол KAC, как угол между касательной и хордой, равен углу DAY, опирающемуся на такую же дугу). Тогда подобны и треугольники ADK и AYC (аналогично, равны углы KAD и CAY, а $KA : AC = DA : AY$ в силу первого подобия). Следовательно, $\angle ADK = 90°$.

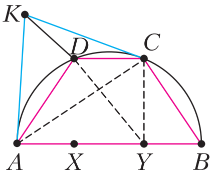


Рис. 16

6. 15 очков.

См. решение задачи 6 для 8 класса LXXXIII Московской математической олимпиады на сайте olympiads.mccme.ru/mmo/

10—11 классы

1. Существует.

Касательная к первой параболе в точке $(a;\, a^2)$ имеет уравнение $y = 2a(x-a) + a^2$. Точки пересечения этой прямой со второй параболой – это $A\left(a-1;\, (a-1)^2 - 1\right)$ и $B\left(a+1;\, (a+1)^2 - 1\right)$. Отрезок AB целиком лежит в U, а квадрат его длины, равный $2^2 + 16a^2$, может быть сколь угодно велик.

2. Пусть произвольное простое p входит в x, y, z в степенях $k \ge l \ge m$. Если $l > 0$, то можно изменить m в пределах от 0 до l, не меняя a, b, c. Поэтому x, y, z попарно взаимно просты. Значит, $a = xy$, $b = xz$, $c = yz = \dfrac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)}$.

6. Лемма. Сумма квадратов $2^k m$ последовательных целых чисел ($k > 0$, m нечетно) делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.

Доказательство. Индукция по k. *База* ($k = 1$). Сумма двух последовательных квадратов нечетна, значит, сумма $2m$ последовательных квадратов – сумма нечетного числа нечетных слагаемых, т.е. нечетна.

Шаг индукции. Пусть $k \ge 2$, $n = 2^{k-1}m$, $a_1, \ldots, a_n$ – первые n из $2n$ последовательных чисел. Тогда $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + (a_1+n)^2 + \ldots + (a_n+n)^2 = 2\left(a_1^2 + \ldots \right.$ $\left.\ldots + a_n^2\right) + 2n(a_1 + \ldots + a_n) + n^3$.

Каждое из трех слагаемых делится на 2^{k-1} (первое – по предположению индукции). При этом первое слагаемое не делится на 2^k, а другие два делятся. (*Замечание*. Другое доказательство леммы можно получить, воспользовавшись формулой для суммы квадратов натуральных чисел от 1 до N.)

Вернемся к задаче. Заметим, что $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$. Следовательно, на каждом шаге сумма квадратов $2n$ чисел на доске удваивается. По лемме она никогда не сможет являться суммой $2n$ последовательных квадратов.

7. Для всех натуральных k.

Есть 4 вида линий. Линии, на которых есть черные клетки, назовем *покрываемыми*. Требуется, чтобы на каждой покрываемой линии было ровно по k черных клеток.

Набор черных клеток, для которого на каждой покрываемой линии содержится ровно k клеток, назовем *k-набором*. Из k-набора можно получить $2k$-набор. Для этого вырежем квадрат, содержащий k-набор, и разместим его копии в квадратах, отмеченных буквами на рисунке 17.

	X		Y	
Y				X
X				Y
	Y		X	

Рис. 17

Назовем k-набор *супернабором*, если его можно разбить на 1-наборы с тем же множеством покрываемых линий у каждого. Указанный выше метод из k-супернабора строит $2k$-супернабор. Действительно, разобьем k-супернабор на 1-наборы. Возьмем один из них. Его копии на однобуквенных местах образуют 1-набор, который покрывает то же множество линий, что и $2k$-набор. Весь $2k$-набор разобьется на такие 1-наборы, значит, это $2k$-супернабор.

В k-супернаборе легко выделить l-набор для любого $l \le k$: взять в нем l разных 1-наборов с тем же множеством покрывающих линий у каждого.

Осталось заметить, что 1-супернабор существует: он состоит, например, из одной клетки. Тогда для каждого k мы сможем создать сначала N-супернабор с $N > k$, а затем получить из него нужный нам k-набор.

Устный тур для 11 класса

1. 2019!.

Пример. Условию задачи, очевидно, удовлетворяют числа 1, 1, 2!, 3!, …, 2019!, так как при любом натуральном k число $(k+2)!$ делится и на $(k+1)!$, и на $(k+1)! + k! = k!(k+2)$.

Оценка. Пусть a, b, c – три подряд идущих числа в строке, но не первые три числа. Докажем, что $\dfrac{c}{b} \ge \dfrac{b}{a} + 1$. По условию, $\dfrac{b}{a} = x$, $\dfrac{c}{b} = y$, где x и y натуральные. Тогда $c = by = axy$, причем c делится на $b + a = ax + a = a(x+1)$. Получаем, что axy делится на $a(x+1)$, откуда xy делится на $x+1$, а так как x и $x+1$ взаимно просты, y делится на $x+1$, т.е. $y \geq x+1$, что и требовалось.

Заметим, что первые два числа не меньше 1 каждое. Третье число больше второго (так как делится на сумму второго и первого), а значит, хотя бы в два раза больше второго (так как делится на него и не равно ему). По доказанному выше, четвертое число тогда хотя бы в 3 раза больше третьего, пятое – хотя бы в 4 раза больше четвертого и так далее, откуда по индукции получаем, что k-е число не меньше $(k-1)!$ при всех натуральных k.

2. Заметим, что если O – центр описанной окружности, то $\angle ACO = \angle C_0CB = \pi/2 - \angle B$. Следовательно, точки O и C_1 симметричны относительно биссектрисы угла C и $IC_1 = IO$, где I – центр вписанной окружности. Аналогично, $IO = IA_1 = IB_1$, т.е. I – центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

3. Нет.

Рассмотрим клетчатый квадрат размером 11×11 и удалим из него внутренний центральный квадрат 9×9, оставив только рамку толщиной 1. В рамке будет как раз 40 клеток. Докажем, что на плоскости нет клетчатого прямоугольника, содержащего ровно 20 из этих 40 клеток.

Допустим, такой прямоугольник есть. Пусть в нем есть клетки из обеих вертикальных сторон рамки. Тогда каждая горизонтальная сторона рамки либо полностью включена в прямоугольник, либо вовсе не включена. Если включена ровно одна горизонтальная сторона, число клеток в прямоугольнике нечетно, если обе – клеток 40 (слишком много), а если ни одной – клеток максимум 9 + 9 = 18 (слишком мало).

Значит, в прямоугольнике могут быть клетки лишь из одной вертикальной стороны рамки и, аналогично, лишь из одной горизонтальной стороны рамки. Но эти стороны соседние, и суммарно в них максимум 19 клеток – слишком мало. Противоречие.

5. Пусть O – центр сферы, а ABC – данный сферический треугольник. По формуле площади сферического треугольника, $\pi = S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$, т.е. $\angle A + \angle B + \angle C = 2\pi$. (Доказательство формулы площади заключается в применении формулы включений-исключений к трем полусферам, пересечением которых является данный треугольник.)

Построим на сфере точку D, лежащую с C в разных полуплоскостях относительно OAB и такую, что $\angle DAB = \angle CBA$ и $\angle DBA = \angle CAB$ (имеются в виду сферические углы; иначе говоря, точка D получена из C композицией симметрии относительно OAB и симметрии относительно серединного перпендикуляра к AB). Тогда треугольники ABC и BAD равны. Значит, $BD = AC$ и $AD = BC$. Но из условия имеем $\angle DAC = \angle DBC = \angle ACB$, следовательно, сферические треугольники CDA и DCB также равны треугольнику ABC. Четыре полученных треугольника покрывают сферу.

6. Степени двойки.

Присвоим цветам остатки 0, 1, 2 от деления на 3 произвольным образом. Все операции с ними также будем производить по модулю 3. Тогда операция робота такова: если уничтожаются кубики цветов a и b, то появляется кубик цвета $-a-b$.

Если $N = 2^k$, то после каждого прохода полного круга количество кубиков уменьшается вдвое, а их сумма меняет знак. Значит, в конце получится кубик цвета $(-1)^k(a_1 + \ldots + a_N)$, вне зависимости от места старта, т.е. степени двойки удачные.

Если $N = 2^k + d$, где $1 \leq d \leq 2^k - 1$, то рассмотрим расстановку из одного красного кубика и $N-1$ белого. Если робот стартует перед красным кубиком, то после d ходов останутся один синий кубик и $2^k - 1$ белых. Если робот стартует после красного кубика, то через d ходов останутся один красный кубик и $2^k - 1$ белых. В обеих ситуациях итоговые цвета будут разными, т.е. N неудачное.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ № 201363

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8
Тел.: (831) 216-40-40

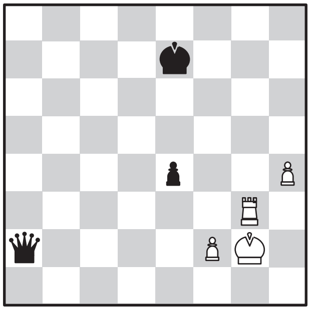
ПрерванныЙ ТУРНИР

Главным событием шахматной весны стал турнир претендентов. Начало турнира удалось российскому гроссмейстеру Яну Непомнящему, который стартовал с двух побед, однако после поражения в последнем туре его догнал француз Максим Вашье-Лаграв. Именно эти два гроссмейстера, скорее всего, разыграют между собой право сразиться с Магнусом Карлсеном.

А.Гири – Я.Непомнящий

Екатеринбург, 2020

1. ♘f3 ♞f6 2. c4 c5 3. ♘c3 ♞c6 4. d4 cd 5. ♘d4 e6 6. g3 ♛b6 7. ♘db5 ♞e5 8. ♗f4 ♞fg4 9. e3 a6 10. h3 ab 11. hg ♞c4 12. ♖c1 d5 13. b3 ♝b4! (тактический ресурс, позволяющий сохранить инициативу на ферзевом фланге) **14. bc ♜a3 15. ♗e5 f6 16. ♗d4 ♛a5 17. ♗e2 ♝c3+ 18. ♖c3 ♜c3 19. ♔f1!** Жертва качества раскрывает суть дебютного плана белых, рассчитывающих на активность чернопольного слона. **19... b4! 20. g5 e5 21. ♗c3 bc 22. gf gf 23. ♕b1!?** (защищая пешку на a2 и контролируя f5) **♛c7! 24. ♕d3?!** (сильнее ♕b4, или ♕b5+, не допуская ответ черных) **b5! 25. ♕c3 bc 26. e4 de 27. ♖h4 ♝e6 28. ♖e4 0-0 29. ♗c4 ♚g7 30. ♕b3 ♜b8 31.♗e6!** Жертвуя ферзя за ладью со слоном, белые получают теоретически ничейный эндшпиль. **31... ♜b3 32. ♖g4+ ♚f8 33. ♗b3 ♛c1+ 34. ♔g2 ♛c6+ 35. ♔g1 h5 36. ♖g8+?** (Ставит белых на грань поражения. Правильное 36. ♖h4 ♛f3 37. ♗c4! f5 38. ♗f1 f4 39. gf ef 40. ♗g2 позволяло построить ничейную крепость.) **36...♚e7 37. ♖g7+ ♚d6 38. ♖h7 ♛f3 39. ♖h8 e4 40. ♖d8+ ♚e7 41. ♗d1 ♛c3 42. ♖d5 h4!** (еще один пешечный выпад вынуждает белых отдать слона) **43. gh f5 44. ♖f5 ♛e1+ 45. ♔g2 ♛d1 46. ♖g5 ♛a1 47. ♖g4 ♛b1 48. ♖g3 ♛a2.**

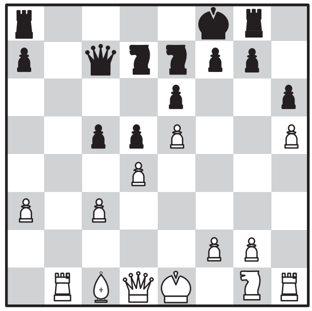


Черные достигли теоретически выигранной позиции. Без пешек e4 и h4 это была бы ничья, так как черный король не смог бы добраться до пешки f2, а теперь план черных состоит в том, чтобы поставить короля на d4, а ферзя на d3 и, пользуясь угрозой создания проходной, проникнуть королем на вторую горизонталь. Однако в первую очередь надо избавиться от пешки h4. **49. ♖h3 ♛d5 50. ♔f1 ♛d1+!** Короля нельзя пускать на e2, чтобы он не успел заблокировать проходную. **51. ♔g2 ♛g4+ 52. ♖g3 ♛h5!** (52...♛h4? 53. ♔f1, и король уходит на e2) **53. ♖a3 ♛d5 54. ♔g1 ♚f6 55. ♖g3!** (белые стараются максимально усложнить задачу черным, отрезая короля от линии h) **♛d1+ 56. ♔g2 ♚f5 57. ♖g5+ ♚f4 58. ♖g3 ♛d5 59. ♔f1 ♛d2 60. ♔g2 ♛d1 61. ♖e3 ♚f5.** Черные упускают красивый выигрыш: 61...♛d5+! 62. ♔f1 ♛c4+ 63. ♔e1 ♛c1+ 64. ♔e2 ♛e3+ 65. fe ♚g4, и одна пешка сильнее двух! **62. ♖g3 ♚f6 63. ♖h3 ♚g6 64. ♖g3+ ♚h5 65. ♖h3 ♛b1! 66. ♖e3 ♚h4 67. ♖g3 ♚h5 68. ♖h3+ ♚g4 69. ♖g3+ ♚f4 70. ♖e3 ♛d1 71. ♖a3 ♚e5 72. ♖g3 ♚d4 73. ♖e3 ♛d3.** Искомая позиция достигнута, и **белые сдались.**

М.Вашье-Лаграв – Я.Непомнящий

Екатеринбург, 2020

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♘c3 ♝b4 4. e5 c5 5. a3 ♝c3+ 6. bc ♞e7 7.h4 ♛c7 8. h5 h6 9. ♖b1 b6 10. ♕g4 ♜g8 11. ♗b5+ ♚f8 12. ♗d3 ♝a6 13. dc ♝d3 14. cd ♞d7 15. d4 bc 16. ♕d1!



Компьютер оценивает эту позицию как полностью равную, а человеческий взгляд обращает внимание на разницу положений ладей на королевском фланге. **16...♛a5 17. ♗d2 ♜b8 18. ♞e2 c4?!** Фиксируя пешки, черные рискуют остаться совсем без активной игры. **19. 0-0 ♜b6 20. ♕c2 ♜h8 21. a4 ♚e8 22. ♖b4 ♞c6 23. f4!? ♞e7** (принимать жертву слишком опасно: 23...♞b4 24. cb ♛a6 25. b5 ♛c8 26. f5 с последующим ♗b4 и ♘f4) **24. ♖fb1 f5 25. ♖b5 ♛a6 26. ♗c1 ♚f7 27. ♗a3 ♜hb8 28. ♗e7 ♚e7 29. g4 ♜b5 30. ab ♜b5 31. gf ♜b1+ 32. ♕b1 ef 33. ♘g3 ♛b6 34. ♘f5+ ♚f8 35. ♕a1.** Белые уклоняются от размена ферзей, так как в коневом эндшпиле у черных появятся шансы за счет лишней пешки на ферзевом фланге. **35...♛e6 36. ♘g3! ♛g4 37. ♔g2.** Несмотря на раскрытое положение короля, подобраться к нему невозможно. **37...♛f4 38. ♕a7 ♚e7 39. ♕a3+ ♚d8 40. ♕d6 g5 41. hg h5 42. g7, и черные сдались.**

А.Русанов

Индекс 90964

ЛЕГКО ЛИ ВАМ ДЫШИТСЯ?

Что более опасно для пребывания в замкнутом пространстве: накопление углекислого газа или нехватка кислорода?

Прогулки с физикой

ISSN 0130-2221 20004

(Подробнее – на с. 29 внутри журнала)